**Le principe de récurrence**
Soit une proposition $P_n$ dépendant d'un entier naturel *n*.
Pour démontrer que $P_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ , il suffit de montrer que :

- La proposition est vraie au rang $n_0$ ;
- pour un entier *k* quelconque ($k \geq n_0$) $P_k$ vraie entraîne $P_{k+1}$ vraie.

**Définition :** Une suite $(u_n)$ admet pour limite un réel $\ell$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Lorsqu'une suite $(u_n)$ admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente (ou qu'elle converge).
Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

**Propriété *Limites de suites convergentes usuelles***
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ . Plus généralement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$

**Propriété *Unicité de la limite d'une suite convergente***
Si une suite converge alors sa limite est unique.

**Propriété *Opération sur les limites de suites convergentes***
Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell$ et $\ell'$.
On admet les résultats suivants :

- la suite de terme général $u_n + v_n$ est convergente et a pour limite $\ell + \ell'$ ;
- la suite de terme général $u_n \times v_n$ est convergente et a pour limite $\ell \times \ell'$ ;
- la suite de terme général $k \times u_n$ où $k$ est un réel est convergente et a pour limite $k \times \ell$ ;
- si $v_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si $\ell' \neq 0$ alors la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

**Propriété *Comptabilité avec l'ordre***
Soient $(u_n)$, et $(v_n)$.sont deux suites convergentes de limites respectives $\ell$ et $\ell'$.
Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$ (ou bien $u_n \leq v_n$) alors $\ell \leq \ell'$.

**Conséquence :** Si $(u_n)$ est une suite croissante et convergente vers $\ell$ alors, pour tout *n*, $u_n \leq \ell$

**Théorème des gendarmes**
On considère trois suites $(u_n)$, et $(w_n)$.
Si $(u_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes vers un même réel $\ell$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors $(v_n)$ est elle aussi convergente vers $\ell$.

**Suites divergentes de limite infinie**
**Définition** On dit qu'une suite $(u_n)$ admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]\,A\,;+\infty\,[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

De façon analogue, on dit qu'une suite $(u_n)$ admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A\,[$, où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Dans un cas comme dans l'autre, on dit que la suite est divergente.

**Propriété Limites de suites divergentes usuelles**
$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ . Plus généralement $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ où $k \in \mathbb{N}^*$

***Limite d'une somme***
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
Dans le cas où l'une au moins des suites a une limite infinie, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

**La limite de la somme $u_n + v_n$**

| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ \ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | **Forme indéterminée** |
| $-\infty$ | **Forme indéterminée** | $-\infty$ |
| $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

***Limite d'un produit***

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = \ell\, \ell'$

Dans le cas où l'une au moins des suites a une limite infinie, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

**La limite du produit $u_n \times v_n$**

| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ \ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell$ ( $\ell > 0$) | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell$ ( $\ell < 0$) | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | **Forme indéterminée** | **Forme indéterminée** |

***Limite d'un quotient***

**La limite du quotient**

| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ \ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $\ell'$ ($\ell' > 0$) | $\ell'$ ($\ell' < 0$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell$ ($\ell > 0$) | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | |
| $\ell$ ($\ell < 0$) | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | | |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | |

**Comparaison** : Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que pour tout $n$, $u_n \leq v_n$

* Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

* Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**Propriété** ***Cas de suites géométriques***

Soit $q$ un réel.

si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

si $q \leq -1$ alors $q^n$ n'admet pas de limite.

**Propriété cas des suites monotones divergentes**

Si une suite $(u_n)$ est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si une suite $(u_n)$ est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**Théorème Convergence monotone**

Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.

Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

**Remarque :** ce théorème permet de dire que la limite existe, mais ne permet pas de déterminer cette limite.

**Propriété :** si une suite $(u_n)$ est définie par la donnée de son premier terme et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite converge vers le réel L et si $f$ et continue en L alors L et solution de l'équation $f(x) = x$.

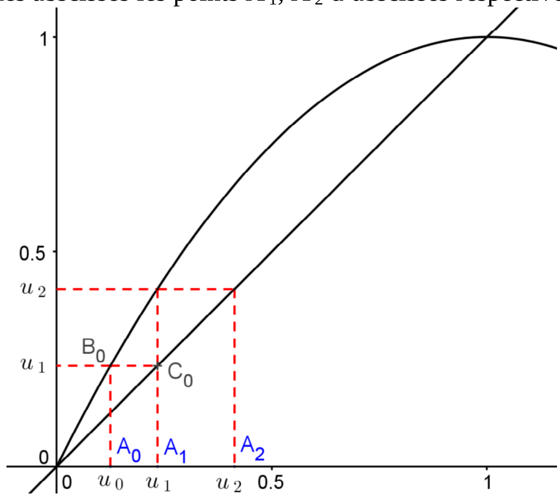
**Remarque :** en supposant la suite convergente, cette propriété permet de déterminer les valeurs possibles de la limite. Elle ne permet pas de montrer que la suite est convergente.

Il se peut que l'équation $f(x) = x$ admette plusieurs solutions, ce sont les encadrements obtenus précédemment de la limite L, qui permettent d'exclure éventuellement certaines solutions.

**Représentation graphique définie par $u_{n+1} = f(u_n)$**

**Exemple :** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{8}$, et, pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Dans un repère orthonormal, tracer, sur l'intervalle [0 ; 2], la droite $d$ d'équation $y = x$ et la courbe P représentative de la fonction $f$ : $x \to x(2 - x)$.
Utiliser $d$, et P pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1$, $A_2$ d'abscisses respectives $u_1$ et $u_2$.




Il faut tout faire sans calcul, uniquement à la règle :

Placer le point $A_0$ d'abscisse $\frac{1}{8}$ sur l'axe des abscisses

Le point $B_0$ d'abscisse $u_0$ de la courbe représentative de $f$ a pour ordonnée $f(u_0) = u_1$

Le point $C_1$ de la droite d'équation $y = x$, qui a la même ordonnée que $B_0$ soit $u_1$ a pour abscisse $x = y = u_1$

D'où la construction du point $A_1$ d'abscisse $u_1$ sur l'axe des abscisses