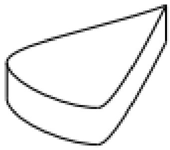
Amérique du Sud novembre 2017

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats



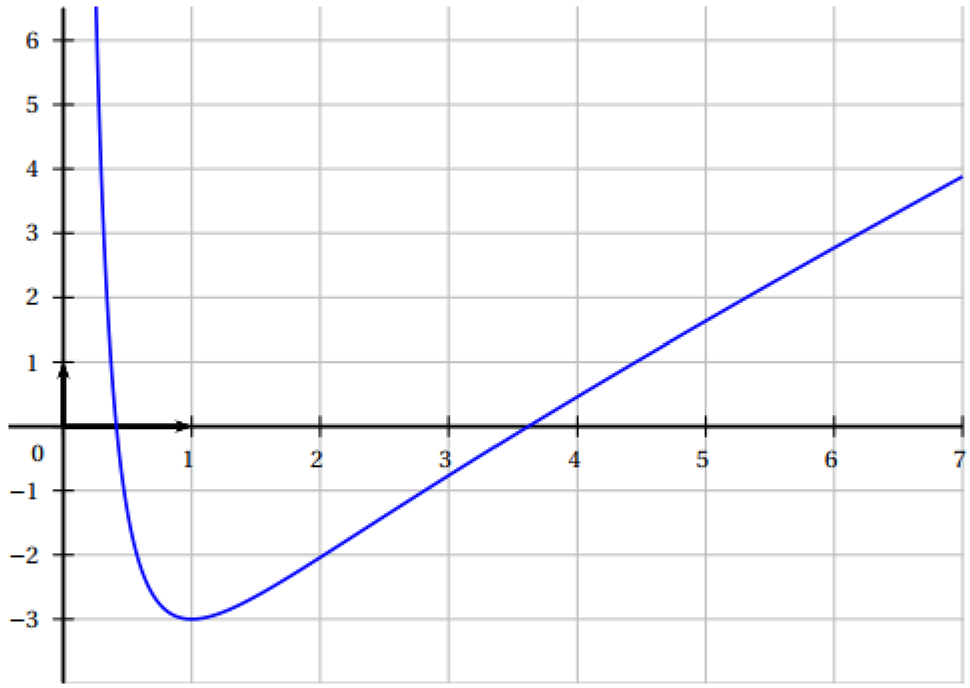
La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

Partie A : modélisation par une jonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $\varphi(x)=x^2-1+3\ln x$.

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Étudier les variations de φ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. *a.* Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que sur $]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

c. Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x)=0$ a également une unique solution β sur $[1\,;+\infty\,[$ avec $\beta\approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

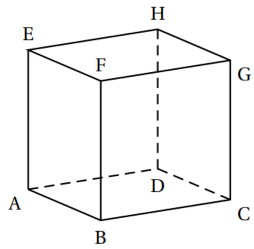
d. Soit F la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x-2\ln x-\dfrac{3}{2}(\ln x)^2$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.
Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ ainsi que son symétrique C ′ par rapport à l'axe des abscisses.
Les deux courbes C et C ′ délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm.
Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH.



1. *a.* Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = 0$

c. On admet que $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = 0$. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer le volume de la pyramide BDEG.

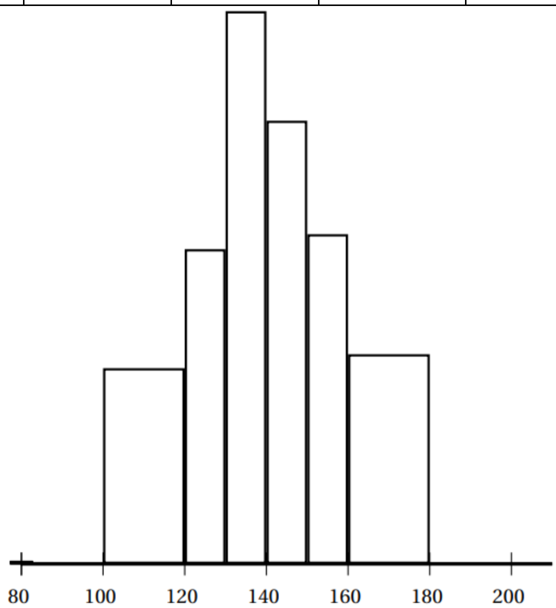
EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.

Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 180[
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1. *a.* Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.

b. On note $p = P(X \geq 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{3}.

2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie ; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.

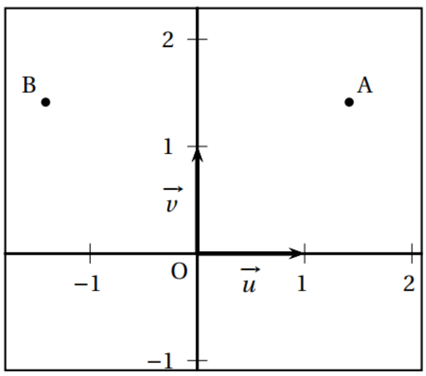
a. L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.

b. Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de 0,01 de se tromper ?

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u} , \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 2\,e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_B = 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0$.

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016 + n. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 12 \text{ et, pour tout entier nature } n,\ u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1\,u_n$$

1. On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1\,x$.

a. Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].

b. Résoudre dans R l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

Il utilise l'algorithme suivant :

Variables	*n* un entier naturel *u* un nombre réel

Traitement	*n* prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ....
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur ....
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r > 50$.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S). Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.

Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

• un joueur de l'équipe A *y* reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; il devient joueur solitaire avec une probabilité de 0,25. Sinon, il rejoint l'équipe B ;

• un joueur de l'équipe B *y* reste le jour suivant avec une probabilité de 0,6 ; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;

• un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

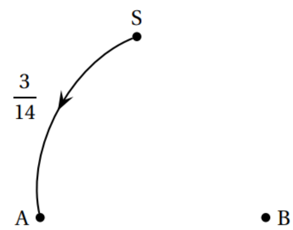
Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.

On note $U_n = (a_n \quad b_n \quad s_n)$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de *n* jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après *n* jours de jeu.

On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1. On note *p* la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \frac{3}{14}$.

2. *a.* Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b. On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel *n*, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.

Montrer alors que, pour tout entier naturel *n*, on a $U_n = U_0 T^n$.

c. Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3. On pose $V = (300 \quad 405 \quad 182)$.

a. Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel V T. Que constate-t-on ?

b. En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande «U[*i*] » renvoie le coefficient de la *i*-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	*k* un entier naturel U une matrice de taille 1 × 3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur (0 0 1) T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour *k* allant de 1 à 7 U prend la valeur U T Fin Pour
Sortie	Afficher U[1]

a. Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b. Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A : modélisation par une jonction

1. *a.* $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3 \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \varphi(x) = -\infty$.

b. $\varphi'(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$, $x > 0$ donc $\varphi'(x) > 0$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	+		+	
φ	‖ $-\infty$	↗	0	↗	
signe de $\varphi(x)$	‖	–	0	+	

φ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, $\varphi(1) = 0$ donc si $x \in]0 ; 1[$, $\varphi(x) < 0$

si $x \in]1 ; +\infty[$ $\varphi(x) > 0$

2. *a.* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x} = x - 2 - \dfrac{2 + 3\ln x}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2 + 3\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2 + 3\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x} = x - 2 - \dfrac{2}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x}$ donc $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - 3\dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 + \dfrac{2}{x^2} - 3\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 + 3\ln x}{x^2}$ donc sur $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $\varphi(x)$	‖	–	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

c. La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $]0 ; 1]$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -3$

$0 \in [-3 ; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; 1]$.

$f(0{,}41) > 0$ et $f(0{,}42) < 0$ donc $0{,}41 < \alpha < 0{,}42$ donc $\alpha \approx 0{,}41$ à 10^{-2} près.

On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1 ; +\infty[$ avec $\beta \approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \dfrac{3}{2}(\ln x)^2$.

$F(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - 2 - 2\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = x - 2 - \dfrac{2}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x}$ donc $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : résolution du problème

La fonction f est continue, négative sur $[\alpha ; \beta]$ donc l'aire comprise entre la courbe C', l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$ est égale à $\int_\alpha^\beta -f(x)\,\mathrm{d}x = -F(\beta) + F(\alpha) \approx 5{,}5982$ *u. a.*

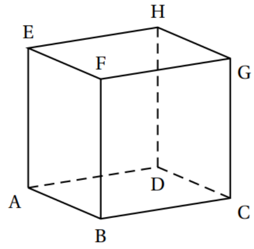
L'aire du palet est donc $2 \times 5{,}5982 = 11{,}1964$ *u. a.*

1 *u. a.* = 1×2 cm^2 donc l'aire du palet est 22,3928 cm^2, le volume de chocolat nécessaire est $22{,}3928 \times 0{,}5$ cm^3 soit 11,1964 cm^3

Pour fabriquer 80 palets, il faut $80 \times 11{,}964 = 895{,}68$ cm^3 donc 0,895 68 litres de chocolat (1 l = 1 dm^3 = 1 000 cm^3)

Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité est respectée.

EXERCICE 2 **4 points** **Commun à tous les candidats**



1. *a.* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD}$

(AC) et (BD) sont deux diagonales du carré ABCD donc sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) donc à la droite (BD) donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

c. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ donc la droite (AG) est orthogonale aux droites (BD) et (BE), ces deux droites sont sécantes en B donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. *a.* B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0), D (0 ; 1 ; 0) et E (0 ; 0 ; 1), ces points ne sont pas alignés.
Pour chacun de ces points $x + y + z - 1 = 0$ donc B, D, E appartiennent à ce plan, donc une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1), donc la droite (AG) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

K $\in$(AG) donc les coordonnées de K sont de la forme (t ; t ; t), K $\in$ (BDE) donc $3t - 1 = 0$ soit $t = \dfrac{1}{3}$

Les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE) sont $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

c. la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE), elle perce ce plan en K donc GK est la hauteur issue de G de la pyramide BDEG.

$\text{AG}^2 = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$

Le volume de la pyramide BDEG est égale à $\dfrac{1}{3} \times$ aire du triangle BDE $\times$ AG = $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 3 **3 points** **Commun à tous les candidats**

Partie A :

Centre des classes	110	125	135	145	155	170	µ = 140,21
Effectif	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711	σ = 19,16

Partie B :

1. *a.* La moyenne et l'écart-type choisis sont compatibles avec ceux de l'échantillon, la forme de l'histogramme évoque une courbe de Gauss, le choix de modélisation semble pertinent.

b. $p = P(X \geq 160)$ donc $p \approx 0,146$

2. *a.* $n = 50$, $n\,p = 7,3$ et $n\,(1 - p) = 42,7$ donc $n \geq 25$, $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) \geq 5$, les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au risque 5 % sont réunies.

I = $\left[p - 1,96 \dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} ; p + 1,96 \dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} \right]$ donc I = [0,048 ; 0,244]

Sur l'échantillon, la fréquence est $f = \dfrac{13}{50} = 0,26$ donc $f \notin$ I, l'organisme a raison de déclarer qu'il y a une anomalie de production.

b. Au risque 1 %, I = $\left[p - 2,58 \dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} ; p + 2,58 \dfrac{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}{n} \right]$ donc I = [0,017 ; 0,275]

Sur l'échantillon, la fréquence est $f = \dfrac{13}{50} = 0,26$ donc $f \in$ I, au risque 1 %, on ne peut pas déclarer qu'il y a une anomalie de production.

EXERCICE 4 **3 points** **Commun à tous les candidats**

1. OA = $|z_A| = 2$, OB = $|z_B| = 2$ donc OA = OB

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ à 2 π près et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ à 2 π près donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ à 2 π près donc OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

2. Le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de centre Ω milieu de [AB] et de rayon $\dfrac{1}{2}$ AB.

Ω a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \sqrt{2}\, i$, O appartient au cercle donc le rayon du cercle est $O\Omega = \sqrt{2}$.

Pour résoudre $z^2 - \sqrt{6}\, z + 2 = 0$, calculons le discriminant : $\Delta = 6 - 4 \times 2 = -2$ donc les solutions de l'équation sont : $\dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

Soit M le point d'affixe $\dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$, $\left|\dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\, i\right|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{6+2}{4} = 2$ donc $\Omega M = \sqrt{2}$, M est situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : un premier modèle

1. Le biologiste estime que la population croît de 5 % par an donc $v_{n+1} = 1{,}05\, v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,05 de premier terme $v_0 = 12$ donc $v_n = 12 \times 1{,}05^n$.

2. $1{,}05 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}05^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, ce modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

1. ***a.*** $g'(x) = -\dfrac{1{,}1}{605} \times 2\,x + 1{,}1 = \dfrac{-2{,}2\,x + 66{,}55}{605} = \dfrac{1{,}1}{605}(-2\,x + 605)$

$-2\,x + 605 = 0 \Leftrightarrow x = 302{,}5$ donc si $0 \le x \le 60$ alors $g'(x) \ge 0$, g est croissante sur $[0 ; 60]$.

b. $g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1\,x = x \Leftrightarrow -\dfrac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1\,x = 0 \Leftrightarrow x\,(60{,}5 - 1{,}1\,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{60{,}5}{1{,}1} = 55$

2. ***a.*** $u_1 = g(12)$ donc $u_1 \approx 12{,}938$

Au bout d'un an, la population sera de 12 938 individus.

b. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 55$.

Initialisation : $u_0 = 12$ donc $0 \le u_0 \le 55$

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $0 \le u_n \le 55$ alors $0 \le u_{n+1} \le 55$

La fonction g est croissante sur $[0 ; 60]$ donc si $0 \le u_n \le 55$ alors $g(0) \le g(u_n) \le g(55)$ or $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$ donc $0 \le u_{n+1} \le 55$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 55$.

c. $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2 + 0{,}1\,u_n = \dfrac{1{,}1}{605}u_n(-u_n + 55)$ or pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 55$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$

La suite (u_n) est croissante.

d. La suite (u_n) est croissante, majorée par 55 donc converge vers ℓ et $u_0 \le \ell \le 55$.

e. $g(\ell) = \ell$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 55$ or $u_0 \le \ell \le 55$ donc $\ell = 55$.

Sur le long terme, la croissance de la population va se tasser pour la stabiliser à 55 000 individus.

Comme 55 000 < 60 000, le modèle respecte les contraintes du milieu naturel et est donc acceptable.

3.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	    u prend la valeur $-\dfrac{1{,}1}{605}u^2 + 1{,}1\,u$
	    n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant Que

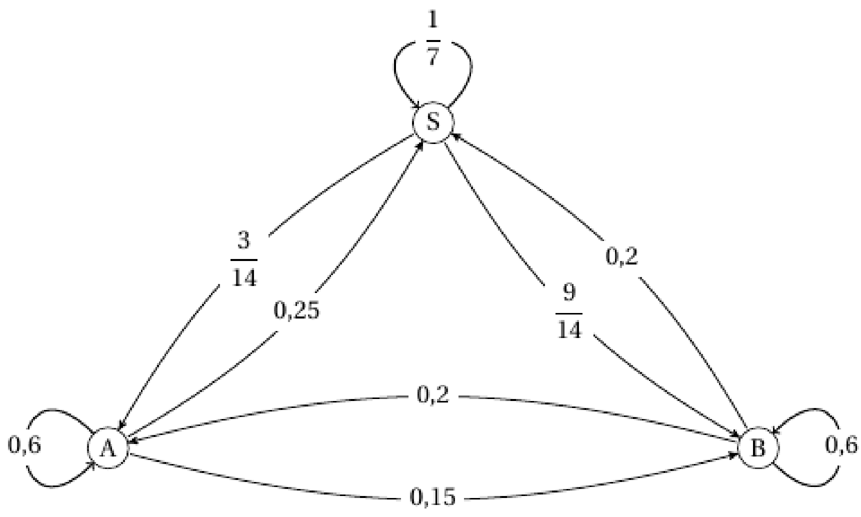
Sortie	Afficher n

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit p la probabilité qu'un joueur solitaire passe dans l'équipe A le jour suivant,
La probabilité qu'un joueur solitaire passe dans l'équipe B le jour suivant est $3\,p$

On a donc $p + 3\,p + \frac{1}{7} = 1$ donc $4\,p = \frac{6}{7}$ donc $p = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

2. *a.*



b. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0\, T^n$.
Initialisation : $T \neq O$ donc $T^0 = I$ donc $U_0\, T^0 = U_0$
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $U_n = U_0\, T^n$ alors $U_{n+1} = U_0\, T^{n+1}$.
$U_{n+1} = U_n\, T$ or $U_n = U_0\, T^n$ donc $U_{n+1} = U_0\, T^n \times T$ donc $U_{n+1} = U_0\, T^{n+1}$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $U_n = U_0\, T^n$.

c. $U_1 = (0\,;\,0\,;\,1)\, T = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Le joueur joue dans l'équipe A avec une probabilité 0,214, dans l'équipe B avec une probabilité 0,643 et est solitaire avec une probabilité 0,143

3. *a.* $V\,T = (\,300 \quad 405 \quad 182\,) = V$ donc V est stable d'un jour sur l'autre

b. V est reste stable d'un jour sur l'autre.

4. *a.* à la fin de l'algorithme $U = U_7$ donc on affiche a_7 soit environ 0,338
Au bout de 7 jours, environ 33,8 % des joueurs sont dans l'équipe A.

b. Il faut calculer U_{13} donc faire varier n de 1 à 13, le pourcentage de joueurs solitaires au bout de 13 jours est U[13]

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $(0 \quad 0 \quad 1)$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 13 U prend la valeur U T Fin Pour
Sortie	Afficher $\frac{U[3]}{13}$