Antilles-Guyane juin 2016

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;

— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif *a*,

$P(T \le a) = \int_0^a \lambda^{\ -\lambda x}\ \mathrm{d}\,x$

a. Montrer que $P(T \ge a) = e^{-\lambda a}$.

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs *t* et *a* on a :

$P_{(T \ge t)}(T \ge t + a) = P(T \ge a)$.

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

b. Calculer la probabilité P (T > 5000).

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On note C l'ensemble des points M du plan d'affixe *z* tels que $|z - 2| = 1$.

1. Justifier que C est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit *a* un nombre réel. On appelle D la droite d'équation $y = a\,x$.

Déterminer le nombre de points d'intersection entre C et D en fonction des valeurs du réel *a*.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par $f(x) = x\,e^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel *x* différent de 0, $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction *f* en $-\infty$ est égale à 0.

2. ***a.*** On admet que *f* est dérivable sur R et on note *f '* sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel *x*, $f'(x) = (1 - 2\,x^2)\,e^{1-x^2}$.

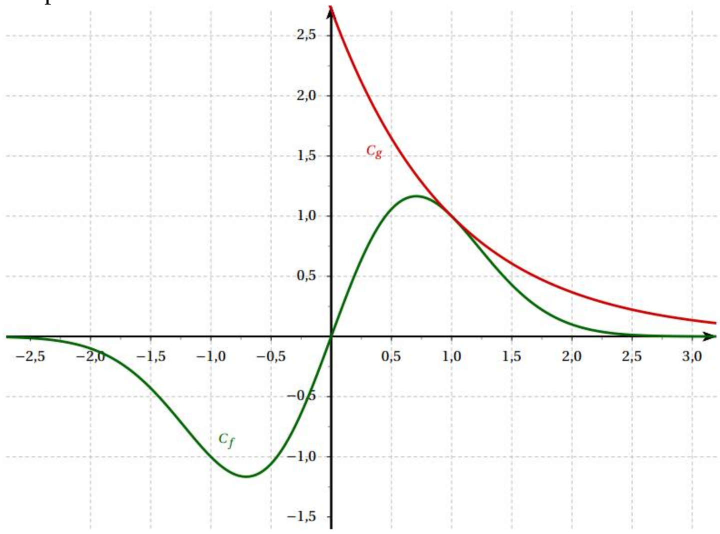
b. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

Partie B

On considère la fonction *g* définie pour tout réel *x* par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions *f* et *g*.

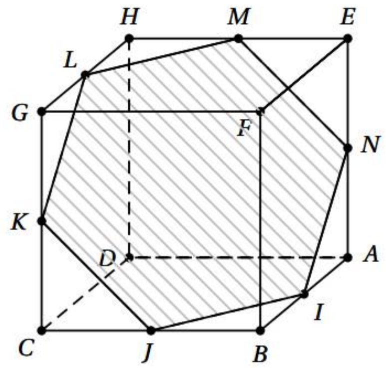
Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.



1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leq 0$.
On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4. *a.* La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.
c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C
1. Trouver une primitive F de la fonction f sur R.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) \mathrm{d}\,x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$
Dans ce repère, on a : D(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 0 ; 0), A(0 ; 1 ; 0), H(0 ; 0 ; 1) et E(0 ; 1 ; 1).
Soit I le milieu de [AB].
Soit P le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.
On admet que la section du cube par le plan P représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [BC], [CG], [GH], [HE] et [AE].



1. *a.* Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
b. En déduire une équation cartésienne du plan P.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment [AE].
3. *a.* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
b. En déduire que la droite (HB) et le plan P sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre F BGE.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : $7x - 3y = 1$. (E)

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\,;\,y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de − 5 à 10
                  (1) ..............
                      (2) ..............
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. *a*. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère la droite D d'équation $7x - 3y - 1 = 0$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M X_n$.

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que $P^{-1} M P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = P D^n P^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

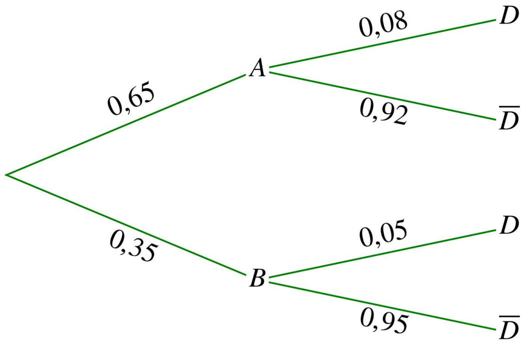
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite D.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. *a.*



b. $P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,9305$.

c. $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,65 \times 0,92}{0,9305}$ donc la probabilité qu'elle provienne de la machine A sachant qu'elle est sans défaut est 0,6427.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

On a une succession de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- réussite : l'ampoule est sans défaut ($p = 0,9305$)
- échec : l'ampoule a un défaut ($q = 1 - p = 0,0695$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre d'ampoules ayant un défaut suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0 ;9305)

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0,8500$

Partie B

1. *a.* Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F(x) = -e^{-\lambda x}$ donc $P(T \leq a) = F(a) - F(0) = 1 - e^{-\lambda a}$.

$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a)$ donc $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.

b. $P_{(T \geq t)}(T \geq t + a) = \dfrac{P((T \geq t + a) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \dfrac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+a) - \lambda a} = e^{-\lambda a} = P(T \geq a)$

2. *a.* $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10\,000$ donc $\lambda = \dfrac{1}{10\,000}$ donc $\lambda = 10^{-4}$.

b. $P(T > 5000) = e^{-\lambda \times 5000} = e^{-0,5}$ donc $P(T > 5000) \approx 0,6065$

c. $P_{(T \geq 7\,000)}(T \geq 7\,000 + 5\,000) = P(T \geq 5\,000)$ donc sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures est de 0,6065

Partie C

1. $p = 0,06$ et $n = 1\,000$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 60$ donc $n\,p \geq 5$, $n\,(1-p) = 940$ donc $n\,(1-p) \geq 5$, les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sont réunies.

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \;;\; p + 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right] = \left[0,06 - 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{1000}} \;;\; 0,06 + 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{1000}} \right]$$

I = [0,0452 ; 0,0748].

2. Sur l'échantillon prélevé, la fréquence d'ampoules défectueuses est $f = 0,071$

$f \in I$ donc au risque d'erreur de 5% on ne peut pas remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. Soit A le point d'affixe 2, $|z-2| = \text{MA}$

$|z-2| = 1 \Leftrightarrow \text{MA} = 1 \Leftrightarrow$ M décrit le cercle, de centre A et de rayon 1.

2. Si M $\in$ D alors $z = x + \text{i}\,a\,x$ donc $|z-2| = |x - 2 + \text{i}\,a\,x|$

M $\in$ C donc $|z-2| = 1$ soit $(x-2)^2 + a^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(1+a^2) - 4x + 4 - 1 = 0$

Soit l'équation du second degré : $x^2(1+a^2) - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4(1+a^2)\times 3 = 16 - 12 - 12a^2 = 4 - 12a^2$

$\Delta = 4(1-3a^2)$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ dans chacun des deux cas C $\cap$ D est réduit à deux points confondus

$\Delta < 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\Leftrightarrow \text{C} \cap \text{D} = \varnothing$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\infty ; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[\Leftrightarrow$ le cercle et la droite ont deux points en commun.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{\text{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. *a.* Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \text{e}^{1-x^2} & v'(x) = -2x\,\text{e}^{1-x^2} \end{cases}$ alors $f'(x) = \text{e}^{1-x^2} - x \times 2x\,\text{e}^{1-x^2} = (1-2x^2)\,\text{e}^{1-x^2}$

Pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x^2)\,\text{e}^{1-x^2}$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $1-2x^2$

$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\text{e}^{0,5}$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\text{e}^{0,5}$	↘	0

Partie B

1. Graphiquement : C_f est en dessous de C_g et les deux courbes sont tangentes au point de coordonnées (1 ; 1).

2. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc pour tout x de $]-\infty ; 0]$, $f(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$ donc, pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

3. *a.* Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x\,\text{e}^{1-x^2} \leq \text{e}^{1-x} \Leftrightarrow \ln\left(x\,\text{e}^{1-x^2}\right) \leq \ln \text{e}^{1-x} \Leftrightarrow \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x$

$\Leftrightarrow \ln x + x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$.

b. La fonction Φ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$: la fonction $x \to \ln x$ et le polynôme $x \to -x^2 + x$ donc la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x}$ or $-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -0,5$

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		↗	0	↘	

c. Φ est croissante sur $]0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$ donc Φ admet un maximum en 1, $\Phi(1) = 0$ donc, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4. *a.* Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0$ donc pour tout réel x strictement positif, C_f est en dessous de C_g.
Pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$ donc C_f est en dessous de C_g, la conjecture est démontrée.

b. pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$ donc sur $]-\infty ; 0]$, C_f et C_g n'ont pas de point commun.
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
C_f et C_g ont un unique point commun, noté A d'abscisse 1.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x^2)\,e^{1-x^2}$, et $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $f'(1) = = g'(1) = -1$
Les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse 1 sont deux droites passant par un même point A, de même coefficient directeur -1 donc sont confondues.

Partie C

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}u'(x)\,e^{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - x^2$ donc une primitive de f est F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-x^2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1 = -e^0 + \frac{1}{2}e^0 - \left(-e + \frac{1}{2}e\right) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right) dx$ est l'aire du domaine compris entre C_f et C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* F a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1).
$\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(-1 ; 0 ; 1)$ donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1 \times (-1) + 0 + 1 \times 1 = 0$
$\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1 ; 1 ; 1)$ donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE), le plan P est parallèle à (BGE) donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan P.
Une équation cartésienne du plan P est de la forme $1\,x + 1\,y + 1\,z + d = 0$
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées (1 ; 0,5 ; 0), I $\in$ (BGE) donc $x_I + y_I + z_I + d = 1 + 0{,}5 + d = 0$ soit $d = -1{,}5$
Une équation cartésienne du plan P est $x + y + z - 1{,}5 = 0$

2. Le milieu J du segment [AE] a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0,5), les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan P donc J appartient à [AE] et au plan P donc J est l'intersection du plan P et de [AE] donc J = N, le point N est le milieu du segment [AE].

3. *a.* $\overrightarrow{HB}$ a pour coordonnées $(1 ; 1 ; -1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (HB) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. Le point d'intersection de la droite (HB) et du plan P, s'il existe, a ses coordonnées vérifiant $x + y + z - 1{,}5 = 0$, de la forme
$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$, donc $t + t - t + 1 - 1{,}5 = 0$ d'où $t = 0{,}5$ donc T a pour coordonnées $(0{,}5 ; 0{,}5 ; -0{,}5)$

4. Le triangle BFG a pour aire $\dfrac{1}{2}$BF × FG = $\dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc le volume du tétraèdre BFGE est $\dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1.

```
Variables :  X est un nombre entier
             Y est un nombre entier
Début :      Pour X variant de − 5 à 10
                 (1) Pour Y variant de – 5 à 10
                     (2) Si que 7 x – 3 y = 1
                     Alors Afficher X et Y
                     Fin Si
                 Fin Pour
             Fin Pour
Fin
```

2. *a.* $7 - 3 \times 2 = 1$ donc (1 ; 2) est une solution particulière de l'équation (E).

b. $\begin{cases} 7x - 3y = 1 \\ 7 \times 1 - 3 \times 2 = 1 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $7(x-1) - 3(y-2) = 0$ soit $7(x-1) = 3(y-2)$

$x - 1 \in \mathbb{Z}$ donc 7 divise $3(y-2)$, 7 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - 2$

Il existe un entier relatif k tel que $y - 2 = 7k$ soit $y = 7k + 2$

En remplaçant dans $7(x-1) = 3(y-2)$ alors $x - 1 = 3k$ soit $x = 3k + 1$

Si $(x ; y)$ est solution de $7x - 3y = 1$ alors $x = 3k + 1$ et $y = 7k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : si $x = 3k + 1$ et $y = 7k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 3y = 21k + 7 - 21k - 6 = 1$ donc $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$ est solution de $7x - 3y = 1$

L'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. L'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(3k + 1 ; 7k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$-5 \le x \le 10$ et $-5 \le y \le 10$ donc $-5 \le 3k + 1 \le 10$ et $-5 \le 7k + 2 \le 10$ soit $-6 \le 3k \le 9$ et $-7 \le 7k \le 8$

soit $-2 \le k \le 3$ et $-1 \le k \le \frac{8}{7}$. Les deux conditions sont équivalentes à $-1 \le k \le 1$

On obtient donc les couples (– 2 ; – 5) ; (1 ; 2) ; (4 ; 9).

Partie B

1. *a.* Pour tout entier naturel n, $M X_n = \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} x_n + 3 y_n \\ -\frac{35}{2} x_n + 8 y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ donc $X_{n+1} = M X_n$.

b. Pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

2. *a.* $P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2{,}5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b. Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$.

c. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $M^n = P^{-1} D^n P$.

Initialisation : M et D ne sont pas nulles donc $A^0 = D^0 = I_2$ donc $P^{-1} D^0 P = P^{-1} P = I_2 = A^0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $M\,n = P^{-1} D^n P$ alors $M\,n + 1 = P^{-1} D^{n+1} P$.

$M^{n+1} = M M^n = P^{-1} D P \times P^{-1} D^n P$ donc $M^{n+1} = P^{-1} D \times D^n P$ donc $M^{n+1} = P^{-1} D^{n+1} P$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $M^n = P^{-1} D^n P$.

3. $X_n = M^n X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} + 2\left(6 - \frac{6}{2^n}\right) \\ -35 + \frac{35}{2^n} + 2\left(15 - \frac{14}{2^n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix}$

$x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$

4. $7x_n - 3y_n = 7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right) = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1$.

Pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite D.