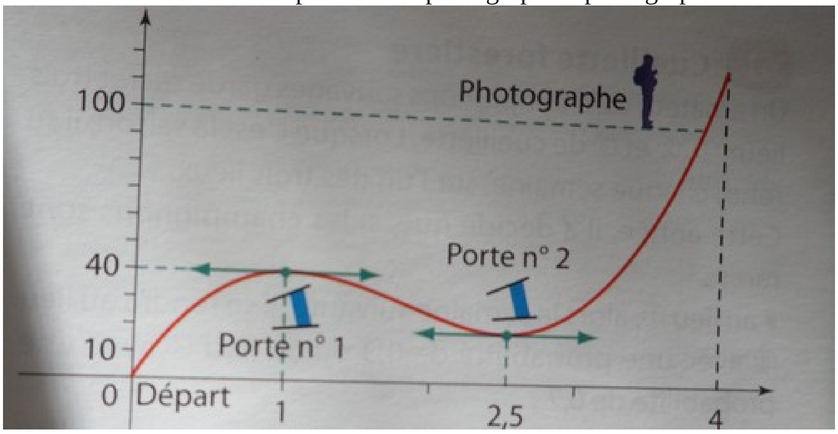
Lors d'un slalom géant, la trajectoire d'un skieur peut être modélisée par la fonction d définie sur [0 ; 4] par $y(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$ où a, b, c et d désignent des nombres réels et où $y(t)$ est exprimé en mètres et t en secondes. Cette trajectoire est représentée dans le repère suivant. On se propose de déterminer le moment précis où le photographe a photographié le skieur.



1. Recherche de l'expression de $y(t)$

a. Expliquer pourquoi $d = 0$

b. Utiliser les deux informations fournies à la porte n°1 et l'information de la porte n°2 pour écrire un système d'équation S d'inconnues a b et c

c. Montrer que ce système est équivalent à l'équation matricielle A X = B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 18{,}75 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

d. Résoudre le système S à l'aide d'un calcul matriciel et en déduire l'expression de $y(t)$.

2. Réponse au problème

a. Dresser le tableau de variation de la fonction y

b. En déduire que l'équation $y(t) = 100$ possède une unique solution α située entre 2,5 et 4

c. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de α.

CORRECTION

1. *a.* La trajectoire passe par l'origine du repère donc quand $t = 0$, $y(0) = 0$ donc $d = 0$, pour tout t de [0 ; 4] ; $y(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t$

b. $y(1) = 40$ et $y'(1) = 0$ et $y'(2{,}5) = 0$ donc a, b, c sont solutions du système : $\begin{cases} a + b + c = 40 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a \times 2{,}5^2 + 2b \times 2{,}5 + c = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} a + b + c = 40 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 18{,}75\,a + 5b + c = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a + b + c = 40 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 18{,}75\,a + 5b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ A X = B avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 18{,}75 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

d. A est inversible et A X = B $\Leftrightarrow$ X = A^{-1} B donc $X = \begin{pmatrix} \frac{160}{13} \\ -\frac{840}{13} \\ \frac{1200}{13} \end{pmatrix}$ donc $y(t) = \frac{160}{13}t^3 - \frac{840}{13}t^2 + \frac{1200}{13}t$

2. *a.* $y'(t) = \frac{480}{13}t^2 - \frac{1680}{13}t + \frac{1200}{13}$; $y'(t)$ est un trinôme du second degré qui s'annule en 1 et 2,5

t	0		1		2,5		4
$y'(t)$		+	0	–	0	+	
y	0	↗	40	↘	$\frac{320}{13}$	↗	$\frac{1\,600}{13}$

b. La fonction y est croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; 2,5] donc admet un maximum en 1, pour tout x de [0 ; 2,5], $y(t) \le y(1)$ donc $y(t) \le 40$ donc l'équation $y(t) = 100$ n'a pas de solution sur [0 ; 2,5].
La fonction y est continue, strictement croissante sur [2,5 ; 4], $y(2{,}5) \le 100 \le y(4)$ donc l'équation $y(t) = 100$ admet une seule solution α sur [2,5 ; 4].

c. $y(3{,}850) \approx 99{,}98$ et $y(3{,}851) \approx 100{,}12$ donc $y(3{,}850) < 100$ et $y(3{,}851) > 100$ donc $3{,}850 < \alpha < 3{,}851$