On définit la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$. On ne cherchera pas tout de suite à calculer cette intégrale.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
2. En déduire un encadrement de J_n, pour tout entier $n \geq 1$, puis la limite de la suite (J_n).
3. En étudiant le signe de $J_{n+1} - J_n$, démontrer que la suite (J_n) est décroissante.
4. Etablir que, pour tout entier $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
5. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$. Déterminer alors la limite de $n J_n$.
6. Calculer J_1, puis en utilisant la question 4, déterminer J_3 et J_5.

CORRECTION

1. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x^n \geq 0$ donc en multipliant l'inégalité précédente par x^n : pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

2. Les fonctions $x \to \frac{1}{2}x^n$; $x \to \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \to x^n$ sont définies continues sur $[0 ; 1]$ et pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a :

$\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$, donc : $\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$ donc $\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqués aux suites $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

3. $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\,dx$

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$ et la fonction $x \to \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}$ est continues sur $[0 ; 1]$ donc $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\,dx \leq 0$

$J_{n+1} - J_n \leq 0$ donc la suite (J_n) est décroissante.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^n}{1+x^2}\,dx$

donc $J_n + J_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, d'après le calcul de la question 2.

5. pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc en remplaçant n par $n - 2$: pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$\frac{1}{2(n-1)} \leq J_{n-2} \leq \frac{1}{n-1}$ or $J_n + J_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ donc $J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq J_n + J_{n-2} \leq J_n + \frac{1}{n-1}$

soit $J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n-1} \leq J_n + \frac{1}{n-1}$ donc en ne considérant que la première partie de l'inégalité : $J_n + \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n-1}$

soit $J_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}$ donc pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

donc pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{n}{2(n+1)} \leq n J_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqués aux suites $\lim\limits_{n \to +\infty} n J_n = \frac{1}{2}$

6. $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

pour tout entier $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ donc en appliquant cette relation à $n = 1$: $J_1 + J_3 = \frac{1}{2}$ donc $J_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

en appliquant cette relation à $n = 3$: $J_3 + J_5 = \frac{1}{4}$ donc $J_5 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$