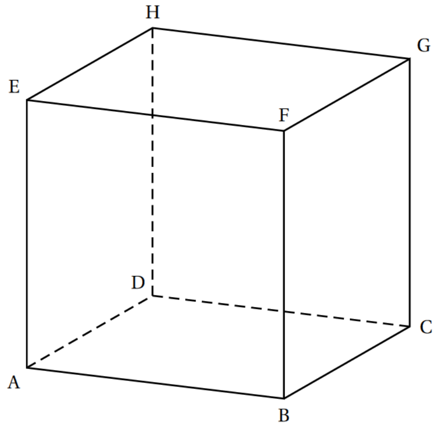
Pondichéry avril 2015

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.



Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives : $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a. Exécuter à la main cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n}\,(5\,;-8\,;4)$ normal au plan (MNP).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$. Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

ANNEXE

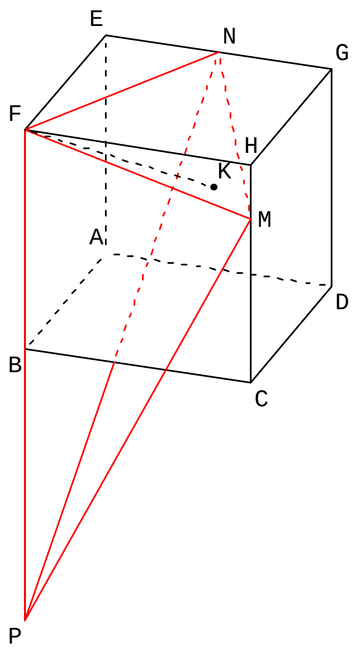
Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

CORRECTION



2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. *a.*

Algorithme 1

```
Saisir xM, yM, zM, xN, yN, zN, xP, yP, zP
d prend la valeur xN − xM
e prend la valeur yN − yM
f prend la valeur zN − zM
g prend la valeur xP − xM
h prend la valeur yP − yM
i prend la valeur zP − zM
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
Afficher k
```

$d = -1$
$e = -0,5$
$f = 0,25$
$g = 0$
$h = -1$
$i = -2$
$k = 0,5 - 0,5 = 0$
Afficher 0

b. Le résultat affiché par l'algorithme correspond à $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$, il est nul donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux donc le triangle MNP est rectangle en M

4. Pour déterminer si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M, il faut et il suffit de vérifier que $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = 0$ et MN = MP soit que $k = 0$ et $MN^2 - MP^2 = 0$

En posant $m = MN^2 - MP^2$, pour ne pas avoir deux tests à faire, il suffit de vérifier que $k^2 + m^2 = 0$

```
Saisir xM, yM, zM, xN, yN, zN, xP, yP, zP
d prend la valeur xN − xM
e prend la valeur yN − yM
f prend la valeur zN − zM
g prend la valeur xP − xM
h prend la valeur yP − yM
i prend la valeur zP − zM
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
m prend la valeur d² + e² + f² − (g² + h² + i²)
Si m² + k² = 0 alors
    afficher « le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Fin Si
```

5. *a.* Le vecteur $\vec{n}\,(5\,;-8\,;4)$ est normal au plan (MNP) donc le plan (MNP) a une équation cartésienne de la forme

$$5x - 8y + 4z + d = 0$$

$N \in (MNP)$ donc $5\times 0 - 8\times\frac{1}{2} + 4\times 1 + d = 0$ donc $d = 0$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$

b. $M \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{FM} = k\,\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 5k\\ y = -8k\\ z-1 = 4k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k+1\\ y = -8k\\ z = 4k+1\end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

6. *a.* $K \in \Delta$ donc les coordonnées de K sont de la forme $(5k+1, -8k, 4k+1)$

$K \in (MNP)$ donc $5(5k+1) - 8(-8k) + 4(4k+1) = 0 \Leftrightarrow 105k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{105} = -\frac{3}{35}$

En remplaçant dans $(5k+1, -8k, 4k+1)$, les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

b. (FK) est perpendiculaire au plan (MNP) et K est un point de ce plan donc [FK] est une hauteur du tétraèdre MNPF.

$V = \frac{1}{3}\times A_{MNP}\times FK = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{27}{35}}\,A_{MNP} = \sqrt{\frac{3}{35}}\,A_{MNP}$. MNP est un triangle rectangle donc l'aire de MNP est $\frac{1}{2}MN\times MP$

$MN^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$, et $MP^2 = 1 + 2^2 = 5$. L'aire de MNP est $\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{21}{16}}\times\sqrt{5} = \frac{\sqrt{105}}{8}$

$V = \sqrt{\frac{3}{35}}\,A_{MNP} = \sqrt{\frac{3}{35}}\times\frac{\sqrt{105}}{8} = \frac{3}{8}$ unités de volume.