Exercice 1 (3 points) Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m , différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_m = \{(A, 1), (B, m), (C, 2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note : $\overrightarrow{V_M} = 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse dorme 0,5 point chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel tonal négatif serait ramené à 0. Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment [CI] .	
G_1 est barycentre de $\left\{(J, 2), \left(C, \dfrac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$.	
Pour tout m, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	
IB $G_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}) il existe un réel m tel que P = G_m.	

Exercice 2 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2\,i$, $z_{A'} = -2 + 4\,i$, $z_B = 3 - i$, $z_{B'} = 5\,i$.

1. *a*. Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Montrer que ABB'A' est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s (A) = A' et s (B) = B'. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z .
Montrer que $z' = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2\,i - 1$.

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i.$$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe 1 + i et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport – 2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c. Soit M_1, d'affixe z_1, l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f .

b. Reconnaître f . En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice 2 (5 points)
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On veut résoudre dans C l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $(z - 2)(z^2 + a\,z + b) = 0$.

b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si : $x^2 - y^2 = 4$.

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H)

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A', B' et C, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

En utilisant la question 2.*a*, prouver que : M' appartient à (H') si et seulement si $x'\, y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

Exercice 3 (4 points) Commun à tous les candidats

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R	R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (Y) ou rouges (R), ont toutes la forme probabilité d'être atteintes
Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 €.
Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 €.
Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd *a* €.
La lettre *a* désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance E(X) soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité *p* qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en 2. *b*?

Exercice 4 (8 points) Commun à tous les candidats

Amérique du Nord Juin 2004

Partie 1

On donne un entier naturel *n* strictement positif, et on considère l'équation différentielle *n* : (E_n) $\quad y' + y = \dfrac{x^n}{n!}\, e^{-x}$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions *g* et *h*, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout *x* réel: $g(x) = h(x)\, e^{-x}$

a Montrer que *g* est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout *x* réel, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

b. En déduire la fonction *h* associée à une solution *g* de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction *g* ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) $\quad y' + y = 0$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution *f* de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$ (on rappelle que par convention $0! = 1$).

1. On pose, pour tout *x* réel, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = x\, e^{-x}$

a Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif *n*, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout *x* réel et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\, e^{-x}$

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. (on ne cherchera pas à calculer I_n)

a. Montrer, pour tout entier naturel *n* et pour tout *x* élément de l'intervalle [0 ; 1] l'encadrement : $\quad 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$

En déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel *k* non nul, l'égalité : $\quad I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\, e^{-1}$

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que : $\quad I_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$

d. En déduire finalement : $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

CORRECTION

Exercice 1 (3 points) Commun à tous les candidats

Si $m = 1$, G_1 le barycentre du système de points pondérés : {(A, 1), (B, 1), (C, 2)} .
I est le milieu de [AB] donc est le barycentre de {(A ; 1) , (B , 1)} donc G_1 est le barycentre du système {(I ; 2) , (C , 2)}
G_1 est le milieu de [CI]

J est le centre de gravité de ABC donc J est le barycentre de {(A ; 1) (B, 1) (C, 1)}
Le barycentre de {(A ; 1) (B, 1) (C, 1) (C, 1)} est le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)} donc est G_1
donc G_1 est le barycentre du système {(J ; 3) , (C , 1)}
en multipliant les coefficients par $\dfrac{2}{3}$ on ne change pas le barycentre donc G_1 est barycentre de $\left\{(J\,,2)\,,\left(C\,,\dfrac{2}{3}\right)\right\}$

$\overrightarrow{V_M} = 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC}$.

La somme des coefficients est nulle donc $\overrightarrow{V_M}$ est un vecteur constant. Si M = A, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} = -\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$.

G_m le barycentre du système de points pondérés : {(A, 1), (B, m), (C, 2 m)} donc $(3m + 1)\,\overrightarrow{AG_m} = m\,(\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC})$.

or $-2\,\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$, donc $(3m + 1)\,\overrightarrow{AG_m} = 2m\,\overrightarrow{AG_{-1}}$

$G_{-\frac{1}{2}}$ est le barycentre du système de points pondérés : {(A, 1), (B,$-\dfrac{1}{2}$), (C, – 1)} donc $-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = 2\,\overrightarrow{AC}$.

donc $BG_{-\frac{1}{2}}$ est parallèle à (AC) or ABC est un triangle rectangle et I est le milieu de [AB] donc ($BG_{-\frac{1}{2}}$) est perpendiculaire à (AB) et donc à (IB), donc $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

Soit P ∈ (AG_{-1}), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AG_{-1}}$ or $2\,\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$ donc $2\,\overrightarrow{AP} = k\,(\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC})$

$2\,\overrightarrow{AP} = k\,(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{AP} + 2\,\overrightarrow{PC})$ soit $2\,\overrightarrow{AP} = k\,(3\,\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{PC})$

$(2 - 3k)\,\overrightarrow{PA} + k\,\overrightarrow{PB} + 2k\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

si $k \neq \dfrac{2}{3}$ alors $\overrightarrow{PA} + \dfrac{k}{2-3k}\,\overrightarrow{PB} + \dfrac{2k}{2-3k}\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

Soit $m = \dfrac{k}{2-3k}$, la somme des coefficients est $3m + 1$

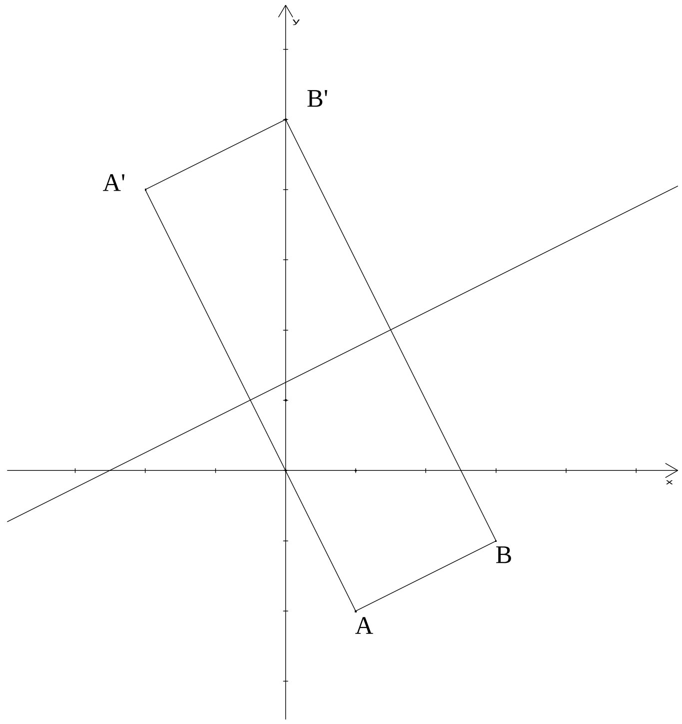
$3m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3k + 2 - 3k = 0$ ce qui est impossible donc pour tout $k \neq \dfrac{2}{3}$, $\overrightarrow{PA} + m\,\overrightarrow{PB} + 2m\,\overrightarrow{PC} = \vec{0}$,

P est le barycentre de {(A, 1) , (B, m) (C, 2 m)} donc P = G_m si $k \neq \dfrac{2}{3}$

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment [CI] .	V
G_1 est barycentre de $\left\{(J\,,2)\,,\left(C\,,\dfrac{2}{3}\right)\right\}$	V
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$.	F
Pour tout m, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	V
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	V
Pour tout point P de (AG_{-1}) il existe un réel m tel que P = G_m.	F

Exercice 2 (5 points) spécialité

1\. *a*.



Le milieu de [AB'] est le point de coordonnées (0,5 ; 1,5).

Le milieu de [A'B] est le point de coordonnées (0,5 ; 1,5), donc les diagonales se coupent en leur milieu donc ABB'A' est un parallélogramme.

$AB'^2 = |1 - 2\,i - 5\,i|^2 = 1^2 + 7^2 = 50$

$A'B^2 = |-2 + 4\,i - 3 + i|^2 = (-5)^2 + 5^2 = 50$ donc les diagonales ont la même longueur donc ABB'A' est un rectangle.

b. (Δ) est la médiatrice de [AA'] et de [BB'] $M \in (\Delta) \Leftrightarrow MA = MA' \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\,x + 1 + y^2 + 4\,y + 4 = x^2 + 4\,x + 4 + y^2 - 8\,y + 16 \Leftrightarrow 12\,y - 6\,x - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 0{,}5\,x + 1{,}25$

c. *s* est la réflexion d'axe (Δ) donc *s* *a* une écriture complexe de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$

s la réflexion telle que *s* (A) = A' et *s* (B) = B'

$s(A) = A'$ donc $-2 + 4\,i = a\,(1 + 2\,i) + b$

$s(B) = B'$ donc $5\,i = a\,(3 + i) + b$

par différence membre à membre : $-2 - i = a\,(-2 + i)$ donc $a = \dfrac{-2 - i}{-2 + i} = \dfrac{(2 + i)\,(2 + i)}{(2 - i)\,(2 + i)}$

$a = \dfrac{3 + 4\,i}{5}$ donc $b = 5\,i - \dfrac{3 + 4\,i}{5}\,(3 + i)$ donc $b = 5\,i - (1 + 3\,i) = -1 + 2\,i$ donc $z' = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,i\right)\bar{z} + 2\,i - 1$.

2\. *a*. $c = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}\,i\right)(1 + 2\,i) + 5 - i = 7 - 5\,i$ et $d = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}\,i\right)(3 + i) + 5 - i = 3 - 7\,i$

b. $\overrightarrow{\Omega C}$ a pour affixe $7 - 5\,i - (1 + i) = 6 - 6\,i$

$\overrightarrow{\Omega A'}$ a pour affixe $-2 + 4\,i - (1 + i) = -3 + 3\,i$ donc $\overrightarrow{\Omega C} = -2\,\overrightarrow{\Omega A'}$

$\overrightarrow{\Omega D}$ a pour affixe $3 - 7\,i - (1 + i) = 2 - 8\,i$

$\overrightarrow{\Omega B'}$ a pour affixe $5\,i - (1 + i) = -1 + 4\,i$ donc $\overrightarrow{\Omega D} = -2\,\overrightarrow{\Omega B'}$

C et D sont les images respectives de A' et B' par *h*.

c. $z - (1 + i) = -\dfrac{1}{2}\,[z_1 - (1 + i)]$

$z = -\dfrac{1}{2}\,z_1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$

3\. *a*. $f(M) = h^{-1}(M_1)$ où M_1 d'affixe z_1 est l'image de M par *g* donc $z_1 = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}\,i\right)\bar{z} + 5 - i$.

$z = -\dfrac{1}{2} z_1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2}\left[\left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}\,\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}\right] + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$

$z = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,\mathrm{i}\right)\overline{z} - \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,\mathrm{i}\right)\overline{z} - 1 + 2\,\mathrm{i}$

b. $f = s$ où s est la réflexion telle que s (A) = A' et s (B) = B' d'axe (Δ).

$g = h \circ f$ donc g est la similitude indirecte d'axe (Δ) de rapport $\dfrac{1}{2}$.

(Δ) a pour équation $y = 0{,}5\,x + 1{,}25$.

Ω a pour affixe 1 + i donc Ω n'appartient pas à (Δ). Cherchons le point invariant par g : $z' = z \Leftrightarrow z = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}\,i\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 5\,z = (-6 - 8\,\mathrm{i})\,\overline{z} + 25 - 5\,\mathrm{i} \Leftrightarrow 5\,(x + \mathrm{i}\,y) + (6 + 8\,\mathrm{i})\,(x - \mathrm{i}\,y) = 25 - 5\,\mathrm{i} \Leftrightarrow 5\,x + 5\,\mathrm{i}\,y + 6\,x - 6\,\mathrm{i}\,y + 8\,\mathrm{i}\,x + 8\,y = 25 - 5\,\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow 11\,x + 8\,y = 25$ et $8\,x - y = -5$
en multipliant la deuxième équation par 8 : $11\,x + 8\,y = 25$ et $64\,x - 8\,y = -40$

en additionnant membre à membre : $75\,x = -15$ donc $x = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2$

$8\,x - y = -5$ donc $y = -0{,}2 \times 8 + 5 = 3{,}4$ donc le centre de g est le point I d'affixe $-0{,}2 + 3{,}4\,\mathrm{i}$ donc g est la similitude indirecte de centre I,

g est la similitude indirecte de centre I, d'axe (Δ) de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Pour construire P, il suffit de le transformer par la symétrie s puis de transformer ce point par l'homothétie de h.

Exercice 2 (5 points) obligatoire

1\. *a.* $z^3 + (a - 2)\,z^2 + (b - 2\,a)\,z - 2\,b = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 4$ et $b - 2\,a = 2$ et $-2\,b = -28 \Leftrightarrow a = 6$ et $b = 14$
$z^3 + 4\,z^2 + 2\,z - 28 = (z - 2)\,(z^2 + 6\,z + 14)$

b. $(z - 2)\,(z^2 + 6\,z + 14) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 6\,z + 14 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 6\,z + 14 = 0$
$\Delta = 36 - 4 \times 14 = -20$

$z = -3 + \mathrm{i}\sqrt{5}$ ou $z = -3 - \mathrm{i}\sqrt{5}$

(E) admet pour solutions : 2 ; $-3 + \mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3 - \mathrm{i}\sqrt{5}$

2\. *a.* $z^2 - 4 = x^2 - 2\,\mathrm{i}\,x\,y - y^2 - 4$
$4 - \overline{z}^{\,2} = 4 - (x^2 + 2\,\mathrm{i}\,x\,y - y^2) = 4 - x^2 - 2\,\mathrm{i}\,x\,y + y^2$
$\mathrm{M} \in (\mathrm{H}) \Leftrightarrow x^2 - 2\,\mathrm{i}\,x\,y - y^2 - 4 = 4 - x^2 - 2\,\mathrm{i}\,x\,y + y^2 \Leftrightarrow 2\,x^2 - 2\,y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$

b. $x = 2$ et $y = 0$ donc $x^2 - y^2 = 4$ donc $\mathrm{A} \in (\mathrm{H})$

$x = -3$ et $y = -\sqrt{5}$ donc $x^2 - y^2 = 9 - 5 = 4$ donc $\mathrm{B} \in (\mathrm{H})$

$x = -3$ et $y = \sqrt{5}$ donc $x^2 - y^2 = 9 - 5 = 4$ donc $\mathrm{C} \in (\mathrm{H})$

3\. *a.* r a pour forme complexe : $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,z = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) z$

si $z = 2$ alors $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ donc A' a pour affixe $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$

si $z = -3 - \mathrm{i}\sqrt{5}$. alors $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - \mathrm{i})\,(-3 - \mathrm{i}\sqrt{5}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-3 + \sqrt{5} + 3\,\mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{5}) = \dfrac{-3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + i\,\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

donc B' a pour affixe $\dfrac{-3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

si $z = -3 + \mathrm{i}\sqrt{5}$. alors $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - \mathrm{i})\,(-3 + \mathrm{i}\sqrt{5}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-3 - \sqrt{5} + 3\,\mathrm{i} - \mathrm{i}\sqrt{5}) = \dfrac{-3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} + i\,\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$

donc C' a pour affixe $\dfrac{-3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} + i\,\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}$

b. $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,z \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,z'$

$x + \mathrm{i}\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})(x' + \mathrm{i}\, y') \Leftrightarrow x + \mathrm{i}\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + \mathrm{i}\, y' + \mathrm{i}\, x' - y') \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$

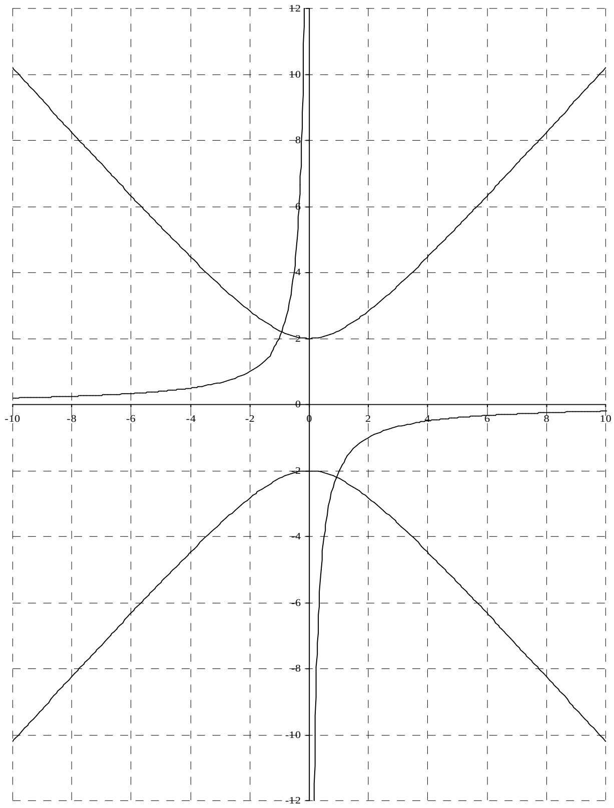
En utilisant la question 2.*a*, prouver que : M' appartient à (H') si et seulement si $x'\, y' = -2$.

$M \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$ or $x^2 = \dfrac{1}{2}(x'^2 - 2\, x'\, y' + y'^2)$ et $y^2 = \dfrac{1}{2}(x'^2 + 2\, x'\, y' + y'^2)$ donc $x^2 - y^2 = -2\, x'\, y'$

donc $M \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x'\, y' = -2$

4. (H') est l'hyperbole équilatère d'équation $y = \dfrac{-2}{x}$

(H) se déduit de (H') par rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ de centre O.



Exercice 3 (4 points) Commun à tous les candidats

1\. *a*. On a 18 cases blanches, 6 jaunes, 2 rouges et 4 vertes.

Il y a équiprobabilités des événements donc la loi de probabilité de X est :

x	$-a$	0	5	8
$p(X = x)$	$\dfrac{18}{30}$	$\dfrac{6}{30}$	$\dfrac{4}{30}$	$\dfrac{2}{30}$

b. $E(X) = -a \times \dfrac{18}{30} + 5 \times \dfrac{4}{30} + 8 \times \dfrac{2}{30} = \dfrac{-9a + 18}{15} = \dfrac{3}{5}(2 - a)$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow a = 2$

2\. *a*. $p(X > 0) = p(X = 5) + p(X = 8) = \dfrac{4}{30} + \dfrac{2}{30} = 0{,}2$

b. On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

le joueur gagne ($p = 0{,}2$)

le joueur ne gagne pas ($q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$)

donc la variable aléatoire Y qui compte le nombre de fois où le joueur gagne suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,2)

$p(Y = k) = \dbinom{5}{k} 0{,}2^k \times 0{,}8^{5-k}$

$p(Y = 2) = 0{,}2048$

$p(Y = 5) = 0{,}2^5 = 0{,}00032$

c. le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en 2. *b* est 'espérance de Y.
$E(Y) = n\,p = 5 \times 0{,}2 = 1$ soit le nombre moyen de parties gagnantes est 1.

Exercice 4 (8 points) Commun à tous les candidats
Partie 1
1. *a* $g'(x) = h'(x)\,e^{-x} - h(x)\,e^{-x} = h'(x)\,e^{-x} - g(x)$ donc

g est solution de $(E_n) \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x)\,e^{-x} = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$

b. g est solution de $(E_n) \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x) = \frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h(x) = \frac{1}{n!} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C$

$h(0) = 0$ donc $C = 0$ donc pour tout x réel, $h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Pour tout x réel, $g(x) = h(x)\,e^{-x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

2. *a* g est solution de (E_n) donc $g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ pour tout x réel.

$\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) $y' + y = 0 \Leftrightarrow (\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0 \Leftrightarrow \varphi' + \varphi = g' + g$

or $g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ pour tout x réel,

$\varphi' + \varphi = g' + g \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $\varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \Leftrightarrow \varphi$ solution de (E_n)

b. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$
y solution de (F) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $y(x) = C\,e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque

c. φ solution de $(E_n) \Leftrightarrow \varphi - g$ est solution de l'équation : (F)
$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $(\varphi - g)(x) = C\,e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque
$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $\varphi(x) = g(x) + C\,e^{-x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} + C\,e^{-x}$

d. pour tout x réel, $\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} + C\,e^{-x}$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{0^{n+1}}{(n+1)!} e^{-0} + C\,e^{-0} = 0 \Leftrightarrow C = 0$

pour tout x réel, $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

Partie II
1. *a* pour tout x réel, $f_1'(x) = (-x + 1)\,e^{-x}$ donc $f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x}$
f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.donc la propriété est vraie pour $n = 1$
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$.

f_n définie pour tout x réel, par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$, est la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$

Montrons que la fonction définie par $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$ pour tout x réel, est la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_n$ vérifiant $f_{n+1}(0) = 0$
D'après la 2. *d.* de la partie I, la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_n$ est la fonction définie pour tout x réel, par $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$ donc est f_{n+1}.

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. *a.* Pour tout x de $[0 ; 1]$, $-1 \le -x \le 0$ donc $e^{-1} \le e^{-x} \le e^0$ donc $0 < e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ donc $0 \le e^{-x} \le 1$;

soit $0 \leq f_0(x) \leq 1$ en prenant par convention si $n = 0$, $\dfrac{x^n}{n!} = 1$,

$x \in [0\,;1]$ donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{x^n}{n!} \geq 0$ donc $0 \leq \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!} \leq \dfrac{x^n}{n!}$.

pour tout entier naturel n, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$

f_n est une fonction définie continue sur $[0\,;1]$, pour tout x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$; $0 \leq 1$

donc $0 \leq \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ donc $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$,

Quand n tend vers $+\infty$, $(n+1)!$ tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{1}{(n+1)!}$ tend vers 0 donc d'après le théorème des gendarmes I_n tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

b. Faisons une intégration par parties :

$u(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ donc $u'(x) = k\dfrac{x^{k-1}}{k!} = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

$v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ donc $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$$\mathrm{I}_k = \left[-\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_k = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k-1} = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$$

c. $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$

si $k = 1$ alors $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_0 = -\dfrac{1}{1!}\mathrm{e}^{-1}$

si $k = 2$ alors $\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1 = -\dfrac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1}$

si $k = 3$ alors $\mathrm{I}_3 - \mathrm{I}_2 = -\dfrac{1}{3!}\mathrm{e}^{-1}$

si $k = n-1$ alors $\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_{n-2} = -\dfrac{1}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-1}$

si $k = n$ alors $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-1} = -\dfrac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1}$

en ajoutant membre à membre :

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_0 = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$$

$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathrm{I}_n = 1 - \left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}$

or $0! = 1$ donc $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}$ donc $\mathrm{I}_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\mathrm{e}^{-1}$

d. $\mathrm{I}_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\mathrm{e}^{-1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - \mathrm{I}_n$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!} = \mathrm{e} - \mathrm{e}\,\mathrm{I}_n$

I_n tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k\,!}$ tend vers e, quand n tend vers $+\infty$. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} = e$