On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par : $u_0 = 0$; $v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	u, v et w des nombres réels
	N et k des nombres entiers
Initialisation :	u prend la valeur 0
	v prend la valeur 1
Début de l'algorithme	
Entrer la valeur de N	
Pour k variant de 1 à N	
	w prend la valeur u
	u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
	v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
FinPour	
Afficher u	
Afficher v	
Fin de l'algorithme	

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A^n X_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A\, X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit P P'.

On admet que P' B P = A. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P' B^n P$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. *a.* Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

CORRECTION

1. $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2}{3}$

2. *a.*

k	w	u	v
1	0,5	0,5	0,6667
2	0,5833	0,5833	0,6111

b. L'algorithme calcule successivement a_k et b_k pour k variant de 1 à N et affiche a_N et b_N.

3. *a.* $A\,X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$. Pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\,X_n$.

b. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : A n'est pas nulle donc $A^0 = I_2$ donc $X_0 = A^0 X_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $X_n = A^n X_0$ alors $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$
$X_{n+1} = A\,X_n$ donc $X_{n+1} = A \times A^n X_0$. donc $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $X_0 = A^0 X_0$.

4. ***a.*** $P\,P' = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{2} & -\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{2} & -\dfrac{6}{5}\times\dfrac{-1}{2}+\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

$P\,P' = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5} & -\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5} & \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P et P' sont inverses l'une de l'autre donc $P\,P' = P'\,P = I_2$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P'\,B^n\,P$.

Initialisation : A et B ne sont pas nulles donc $A^0 = B^0 = I_2$ donc $P'\,B^0\,P = P'\,P = I_2 = A^0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $A^n = P'\,B^n\,P$ alors $A^{n+1} = P'\,B^{n+1}\,P$.
$A^{n+1} = A\,A^n = P'\,B\,P \times P'\,B^n\,P$ donc $A^{n+1} = P'\,B^n \times B^n\,P$ donc $A^{n+1} = P'\,B^{n+1}\,P$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $A^n = P'\,B^n\,P$.

b. $P'\,B^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow P'\,B^n\,P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix}$

$P'\,B^n\,P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times\dfrac{6}{5} & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times\dfrac{6}{5} & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{5}+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times\dfrac{6}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow P'\,B^n\,P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

donc $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

5. *a.* $X_n = A^n X_0$ donc $X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n donc $u_n = \dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

b. $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{5}$.