Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples (x ; y) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation : (E) $x^2 + y^2 = p^2$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.

On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple (x ; y) est solution de l'équation (E)

2. *a*. Montrer que x et y sont de parités différentes.

b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.

c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, donc $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

a. Vérifier qu'alors le couple ($|u^2 - v^2|$; $2uv$) est solution de l'équation (E).

b. Donner une solution de l'équation (E) lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

CORRECTION

1. On pose $p = 2$, l'équation (E) devient $x^2 + y^2 = 4$
x est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq x^2 \leq 4$ donc $x = 1$ ou $x = 2$
y est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq y^2 \leq 4$ donc $y = 1$ ou $y = 2$ donc en faisant une table avec les différentes valeurs de x et de y et la valeur de $x^2 + y^2$ correspondante, l'équation $x^2 + y^2 = 4$ est sans solution.

$y \backslash x$	1	2
1	2	5
2	5	8

2\. *a*. p est un nombre premier différent de 2 donc est impair donc p^2 est impair.
Si x et y sont tous deux pairs, x^2 et y^2 sont pairs donc $x^2 + y^2$ aussi donc $x^2 + y^2 \neq p^2$
Si x et y sont tous deux impairs, x^2 et y^2 sont impairs donc $x^2 + y^2$ aussi donc $x^2 + y^2 \neq p^2$
x et y sont donc de parité différente.

b. si x et y sont tous deux divisibles par p, il existe deux entiers naturels a et b tels que $x = p\,a$ et $y = p\,b$.
$x^2 + y^2 = p^2 \Leftrightarrow a^2 p^2 + b^2 p^2 = p^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$
x et y sont strictement positifs donc a et b sont non nuls donc $a^2 \geq 1$ et $b^2 \geq 1$ donc $a^2 + b^2 \geq 2$
Ceci est incompatible avec $a^2 + b^2 = 1$ donc x et y ne sont pas divisibles par p.

c. Supposons que x et y ne sont pas premiers entre eux, il existe un entier naturel d supérieur ou égal à 2, diviseur commun à x et y.
Il existe donc deux entiers naturels a et b tels que $x = d\,a$ et $y = d\,b$
$x^2 + y^2 = p^2 \Leftrightarrow a^2 d^2 + b^2 d^2 = p^2 \Leftrightarrow d^2 (a^2 + b^2) = p^2$
d divise p^2 donc $d = 1$ (exclu $d > 1$) ou $d = p$ ou $d = p^2$, or x et y ne sont pas divisibles par p donc l'hypothèse est fausse, x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, donc $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
a. Si $x = |\,u^2 - v^2\,|$ alors $x^2 = (|\,u^2 - v^2\,|)^2 = u^4 - 2\,u^2 v^2 + v^4$
Si $y = 2\,x\,y$ alors $y^2 = 4\,u^2 v^2$ donc $x^2 + y^2 = u^4 - 2\,u^2 v^2 + v^4 + 4\,u^2 v^2 = u^4 + 2\,u^2 v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = p^2$ donc le couple $(\,|\,u^2 - v^2\,|\,;\,2\,u\,v)$ est solution de l'équation (E).

b. $5 = 1^2 + 2^2$ donc si $u = 1$ et $v = 2$, le couple $(\,|\,u^2 - v^2\,|\,;\,2\,u\,v)$ est solution de l'équation (E) donc (3 ; 4) est solution de (E)
$13 = 2^2 + 3^2$ donc si $u = 2$ et $v = 3$, le couple $(\,|\,u^2 - v^2\,|\,;\,2\,u\,v)$ est solution de l'équation (E) donc (5 ; 12) est solution de (E)

4\. *a*. On pose $p = 3$, on cherche a et b entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = 3$. 3 n'est pas le carré d'un entier naturel donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$
a est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq a^2 \leq 3$ donc $a = 1$
b est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq b^2 \leq 3$ donc $b = 1$ or $a^2 + b^2 = 2$ donc $p = 3$ n'est pas la somme de deux carrés.

On pose $p = 7$, on cherche a et b entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = 7$. 7 n'est pas le carré d'un entier naturel donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$
a est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq a^2 \leq 7$ donc $a = 1$ ou $a = 2$
b est un entier naturel strictement positif donc $1 \leq b^2 \leq 7$ donc $b = 1$ ou $b = 2$
En faisant une table avec les différentes valeurs de a et de b et la valeur de $a^2 + b^2$ correspondante, l'équation $a^2 + b^2 = 4$ est sans solution.

$b \backslash a$	1	2
1	2	5
2	5	8

b. $x^2 + y^2 = p^2 \Leftrightarrow y^2 = p^2 - x^2$
x et y sont des entiers strictement positifs donc $p^2 - x^2 > 0$ soit $x^2 < p^2$ donc $1 \leq x < p$ soit $1 \leq x \leq p$ de même $1 \leq y \leq p - 1$
Si $p = 3$, l'équation (E) devient $x^2 + y^2 = 7^2$

y	1	2
$y^2 = 9 - x^2$	8	5

ni 8 ni 5 ne sont les carrés de nombres entiers donc l'équation (E) n'admet pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

Si $p = 7$, l'équation (E) devient $x^2 + y^2 = 7^2$

x	1	2	3	4	5	6
$y^2 = 49 - x^2$	48	45	40	33	24	13

Aucun des nombre trouvé n'est le carré d'un nombre entier donc l'équation (E) n'admet pas de solution en entiers naturels strictement positifs.