Amérique du Nord mai 2006
EXERCICE 1 3 points
Commun à tous les candidats

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.
Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien.
Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 Le jeu est :

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

Question 2 Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ B : $\frac{544}{625}$ C : $\frac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.
Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\frac{4}{15}$ B : $\frac{11}{30}$ C : $\frac{11}{15}$

EXERCICE 2 5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
b. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
3. Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1. a. Résoudre dans C l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.
b. En déduire les points associés aux points B et C.
c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. a. Question de cours :

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.
c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D, où D est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

EXERCICE 2 5 points Exercice de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \to \frac{1+i}{2} z + 1 - i$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M′ son image par σ et on note z' l'affixe de M′.
Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$.

2. *a*. Question de cours

Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul.
Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}\,(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle ΩMM′, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.

On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par : $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n > n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

EXERCICE 3 5 points

1. On considère la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de g .

x	0	2,3	x_0	2,4	+ ∞
g(x)	– ∞	↗	0	↗	+ ∞

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$.

a. Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^{\,2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

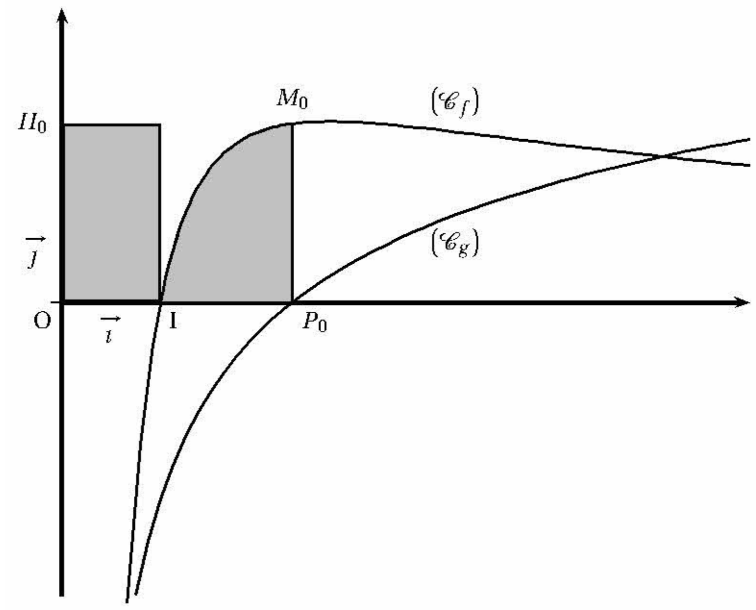
3. On a tracé dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}~;~\vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g).

On appelle I le point de coordonnées (1 ; 0), P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de(C_f) ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme (D_1) le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[\mathrm{I}P_0]$ et $[P_0 M_0]$.

On nomme (D_2) le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de [OI] et $[\mathrm{O}H_0]$.

Démontrer que les deux domaines (D_1) et (D_2) ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



EXERCICE 4 7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur [0 ; + ∞ [vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1) & : \quad \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;+\infty[,\ f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + 0{,}2$

$y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -0{,}2\ y_n^2 + y_n + 0{,}8$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2\,x^2 + x + 0{,}8$. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $p(x) \in [0\,;2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq y_n \leq 2$.

c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Étudier les variations de g sur [0 ; + ∞ [.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

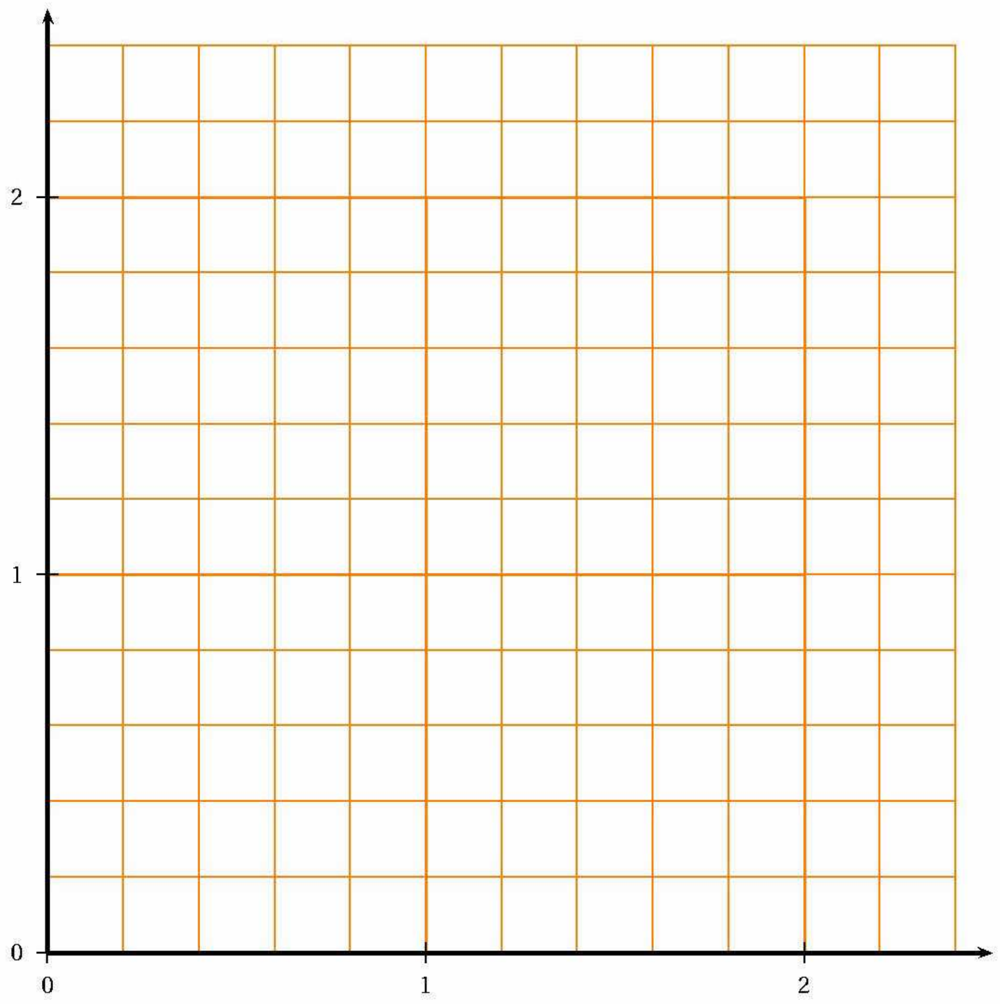
Cette page sera complétée et remise avec la copie avant la fin de l'épreuve

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Partie B



CORRECTION

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

1. Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.
Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, *s*'il est marqué « non », il ne reçoit rien.
Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Le joueur mise 0,30 €, il peut gagner 0,60 € avec une probabilité $\frac{4}{10}$ = 0,4 ou rien avec une probabilité $\frac{3}{10}$ = 0,3 ou recevoir 0,20 € avec une probabilité $\frac{3}{10}$ = 0,3 donc l'espérance de ce jeu est égale à : $(60 - 30) \times 0{,}4 + (0 - 30) \times 0{,}3 + (20 - 30) \times 0{,}3$

$E(X) = 12 - 9 - 3 = 0$. Le jeu est donc équitable.

2. On *a* une succession de 4 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles *a* deux issues :

- le bulletin tiré est marqué « oui », ($p = 0{,}4$)
- le bulletin tiré n'est pas marqué « oui », ($q = 0{,}6$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de bulletins tirés marqués « oui », suit une loi binomiale de paramètres (4 ; 0,4)

La probabilité cherchée est donc : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}6^4 = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$.

3. Il y *a* $\binom{10}{2} = 45$ tirages différents.

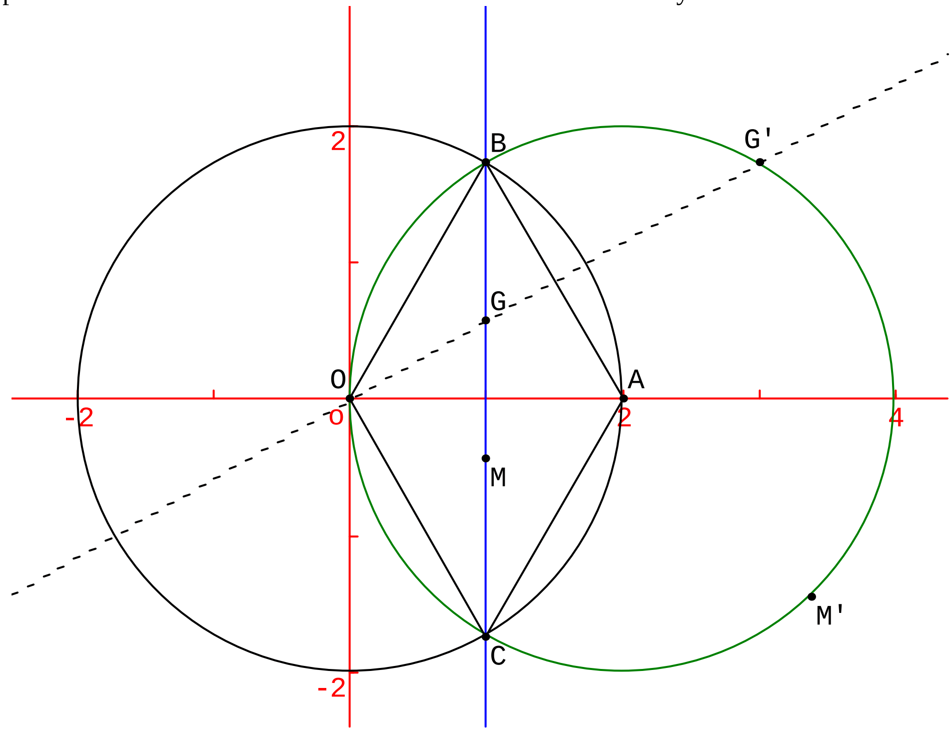
Les possibilités de tirages différents sont : oui-non, oui-blanc et non-blanc donc en nombre égal à $4 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 33$.

La probabilité cherchée est donc : $\frac{33}{45} = \frac{11}{15}$.

EXERCICE 2 5 points
Partie A

1. *a.* $z_B = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, z_C est le conjugué de z_B donc $z_C = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1. *b.* Pour placer les points B et C on trace les deux cercles de centre O et A et de rayon A :



2. $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$; $\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $2 - (1 - i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$

Le quadrilatère OBAC est un parallélogramme.

$|z_B| = |z_C|$ donc OB = OC donc le quadrilatère OBAC est un losange.

3. $|z| = |z - 2| \Leftrightarrow$ OM = AM $\Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice du segment [AO] donc la droite (BC).

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M ' d'affixe z ' défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

1. *a.* $z = \dfrac{-4}{z-2} \Leftrightarrow z\,(z-2) = -4$ et $z \neq 2 \Leftrightarrow z^2 - 2\,z + 4 = 0$ et $z \neq 2$

$\Delta = 4 - 16 = -12 = \left(2\,i\sqrt{3}\right)^2$ donc $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

b. Les solutions de $z = \dfrac{-4}{z-2}$ sont donc les affixes des points B et C qui sont donc les points invariants de l'application qui à z fait correspondre $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

c. $z_G = \dfrac{1}{3}(z_O + z_A + z_B) = \dfrac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$ donc $z'_G = \dfrac{-4}{z_G - 2} = \dfrac{-12}{3 + i\sqrt{3} - 6} = \dfrac{12}{3 - i\sqrt{3}} = 3 + i\sqrt{3}$

Remarque : $z'_G = 3\,z_G$ donc les points O, G, G' sont alignés.

2. *a.* Question de cours :

pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2|^2 = (z_1 \times z_2) \times \overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times \overline{z_1} \times z_2 \times \overline{z_2} = |z_1|^2 \times |z_2|^2$

$|z| \geq 0$ donc $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

pour tout nombre complexe z non nul, $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc $\left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

b. pour tout nombre complexe z distinct de 2, $z' - 2 = \dfrac{-4}{z-2} - 2 = \dfrac{-4 - 2\,z + 4}{z-2} = \dfrac{-2\,z}{z-2}$ donc $|z' - 2| = \dfrac{2\,|z|}{|z-2|}$.

c. M est un point quelconque de D, donc $|z| = |z - 2|$ or $|z' - 2| = \dfrac{2\,|z|}{|z-2|}$ donc $|z' - 2| = 2 \Leftrightarrow$ AM ' = 2

Le point M ' associé à M appartient à un cercle Γ de centre A et de rayon 2.

EXERCICE 2 5 points **Exercice de spécialité**

1\. *a*. La composée d'une r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, est une similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. σ est une similitude directe donc son écriture complexe est de la forme $z' = a\,z + b$

son rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est $\frac{\pi}{4}$ donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$

donc l'écriture complexe de σ est $z' = \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + b$, $\Omega(2)$ est le centre de σ donc $2 = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \times 2 + b$ donc $b = 1 - \mathrm{i}$

L'écriture complexe de σ est : $z \to \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.

c. $z - z' = z - \frac{1+\mathrm{i}}{2}z - 1 + \mathrm{i} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}z - 1 + \mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\,(2 - z') = \mathrm{i}\left[2 - \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}z - 1 + \mathrm{i}\right)\right] = \mathrm{i}\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 + \mathrm{i}\right) = \frac{1-\mathrm{i}}{2}z - 1 + \mathrm{i}$

donc $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$.

2\. *a*. Question de cours

Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $r(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ donc si $\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$, soit $p \neq a$ et $q \neq a$ alors :$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}) = \frac{\pi}{2}$

donc $|\,p - a\,| = |\,q - a\,|$ et, $\arg\frac{q-a}{p-a} = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ soit $\frac{q-a}{p-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ donc $q - a = \mathrm{i}\,(p - a)$.

La relation $q - a = \mathrm{i}\,(p - a)$ reste vraie si $p = a$

b. D'après la question 1. *c*. $z - z' = \mathrm{i}(2 - z')$ donc le point M d'affixe z est l'image de A dans la rotation de centre M' d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc le triangle ΩMM' est un triangle rectangle isocèle en M', $\mathrm{M}' \neq \Omega$.

3\. Soit A_0 le point d'affixe 2 + i.

On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel n, $\mathrm{A}_{n+1} = \sigma(\mathrm{A}_n)$.

a. Montrons par récurrence sur n que pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

$a_0 = 2 + \mathrm{i}$ or $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(0+2)\pi}{4}} + 2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + 2 = 2 + \mathrm{i}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire

c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$ alors $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2$.

$\mathrm{A}_{n+1} = \sigma(\mathrm{A}_n)$ donc $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}a_n + 1 - \mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2\right] + 1 - \mathrm{i}$

soit $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} + 1 - \mathrm{i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) + 1 - \mathrm{i}$

$a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

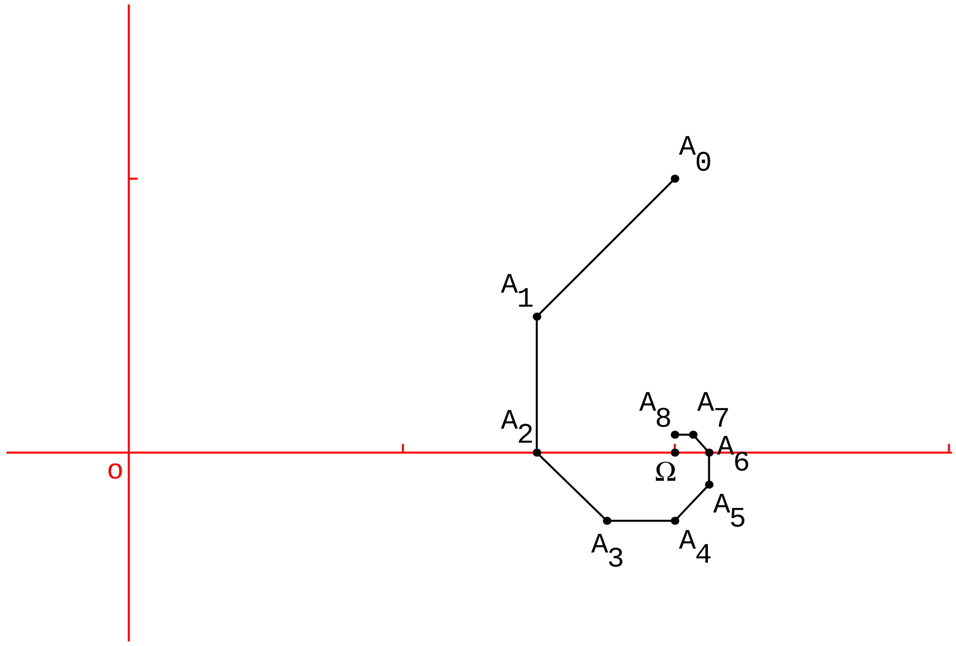
b. Déterminer l'affixe de A_5.

$\mathrm{A}_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) + 2$ soit $\mathrm{A}_5 = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}\mathrm{i}$

4\. le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01 si et seulement si $\Omega\mathrm{A}_n < 0{,}01$

or $\Omega A_n = |\, a_n - 2 \,| = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ donc $\Omega A_n < 0{,}01 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow 100 < \left(\sqrt{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \ln 100 < n \ln\sqrt{2} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 100}{\ln\sqrt{2}}$ or $\dfrac{\ln 100}{\ln\sqrt{2}} \approx 13{,}2$ donc pour $n > 13$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.



EXERCICE 3 5 points

1. On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0		$2{,}3$	x_0	$2{,}4$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\nearrow$	$+\infty$

g est définie dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$, $x > 0$ donc $g'(x) > 0$, g est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$g(x) = \dfrac{1}{x}(x \ln x - 2)$ or $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x - 2 = -2$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

g est définie continue (car dérivable) strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $g(]\,0\,;+\infty\,[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution x_0 sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
$g(2{,}3) \approx -0{,}04$ et $g(2{,}4) \approx 0{,}04$ donc $2{,}3 < x_0 < 2{,}4$

2. Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x}$.

a. $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0}$ or $\ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$ donc $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$

b. Soit $u(x) = \ln x$, $f(x) = 5\,u'(x)\,u(x)$ donc une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{5}{2}[u(x)]^2$

Pour $a > 1$, $\displaystyle\int_1^a f(t)\,dt = \frac{5}{2}[\ln a]^2 - \frac{5}{2}[\ln 1]^2 = \frac{5}{2}[\ln a]^2$

3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g).
On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 a pour coordonnées $(x_0\,;0)$

M_0 a pour coordonnées $(x_0\,;f(x_0))$ soit $\left(x_0\,;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$

H_0 a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{10}{x_0^2}\right)$

(D_1) le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$ a pour aire $\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,dt = \frac{5}{2}[\ln x_0]^2$

(D_2) le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$ a pour aire $1 \times \dfrac{10}{x_0^2}$

$\ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$ donc $\dfrac{5}{2}[\ln x_0]^2 = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{4}{x_0^2} = \dfrac{10}{x_0^2}$ donc les deux domaines (D_1) et (D_2) ont même aire.

$2{,}3 \le x_0 \le 2{,}4$ donc $2{,}3^2 \le x_0^2 \le 2{,}4^2$ donc $\dfrac{10}{2{,}4^2} \le \dfrac{10}{x_0^2} \le \dfrac{10}{2{,}3^2}$ or $1{,}7 \le \dfrac{10}{2{,}4^2} \le \dfrac{10}{x_0^2} \le \dfrac{10}{2{,}3^2} \le 1{,}9$

soit $1{,}7 \le \dfrac{10}{x_0^2} \le 1{,}9$ donc l'aire commune aux deux domaines est comprise entre 1,7 et 1,9.

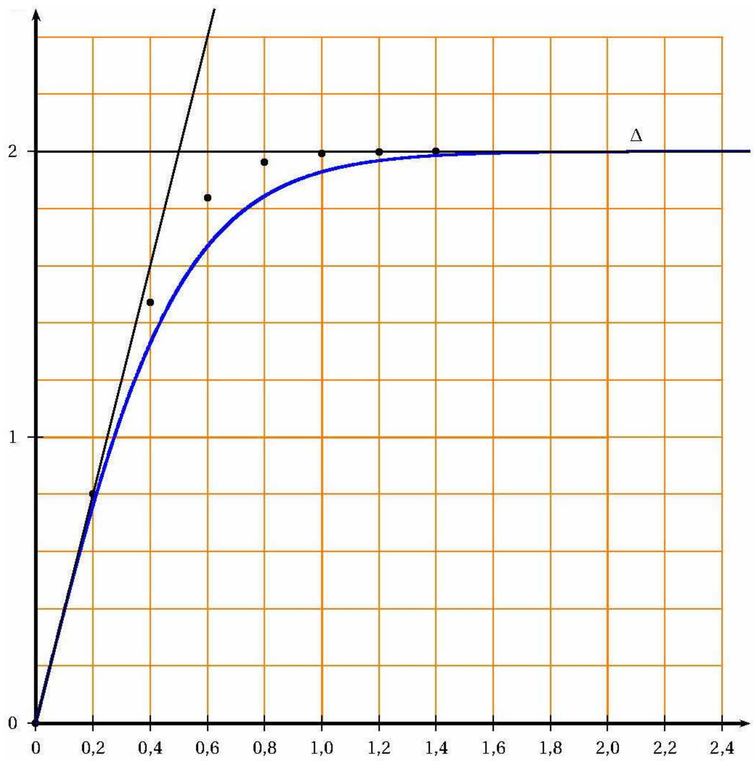
EXERCICE 4 7 points

Partie A. Étude d'une suite

1. *a.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y_n	0	0,800 0	1,472 0	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b.



c. D'après ce graphique, la suite semble croissante et converger vers 2.

2. *a.* $p'(x) = -0,4\,x + 1$ qui s'annule pour $x = 2,5$.
Si $0 \leq x \leq 2$, alors $p'(x) > 0$ donc la fonction p est croissante de $p(0) = 0,8$ à $p(2) = 2$ donc si $x \in [0\,;\,2]$ alors $p(x) \in [0\,;\,2]$.

b. $y_0 = 0$ donc $0 \leq y_0 \leq 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $0 \leq y_n \leq 2$ alors $0 \leq y_{n+1} \leq 2$.
Pour tout x de $[0\,;\,2]$, $p(x) \in [0\,;\,2]$ donc si $y_n \in [0\,;\,2]$ alors $p(y_n) \in [0\,;\,2]$ donc $0 \leq y_{n+1} \leq 2$
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. $y_{n+1} - y_n = -0,2\ y_n^2 + 0,8 = -0,2\,(y_n^2 - 4) = -0,2\,(y_n + 2)\,(y_n - 2)$ or $0 \leq y_n \leq 2$ donc $y_{n+1} - y_n \geq 0$

d. La suite (y_n) est croissante, majorée par 2 donc est convergente.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ (C_g) sa courbe représentative.

1. $e^0 = 1$ donc $g(0) = 0$

$g(x) = 2\left(1 - \dfrac{2}{e^{4x}+1}\right)$ donc $g'(x) = 2\left(\dfrac{2\times 4\,e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}\right) = 16\left(\dfrac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}\right)$

$4 - [g(x)]^2 = 4 - 4\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)^2 = 4\left[1 - \left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)^2\right] = 4\left[1 - \left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)\right]\left[1 + \left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)\right]$

$4 - [g(x)]^2 = 4\left(\dfrac{2}{(e^{4x}+1)^2}\right)\left(\dfrac{2\,e^{4x}}{e^{4x}+1}\right) = 16\left(\dfrac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}\right) = g'(x)$

la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. *a.* $g(x) = 2\left(1 - \dfrac{2}{e^{4x}+1}\right)$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ donc (C_g) admet pour asymptote Δ d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

b. $g'(x) = 16\left(\dfrac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}\right)$, donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$. g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$ donc la tangente à (C_g) à l'origine a pour équation $y = 4\,x$
L'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine est telle que $4\,x = 2$ donc $\alpha = 0,5$.