Exercice 1 6 points Commun à tous les candidats.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe C admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ.

3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
5. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par : $I_n = 2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2\. *a*. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine D quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 4 points Commun à tous les candidats.

Les quatre questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = 4 - t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t', \quad t' \in \mathbb{R}. \\ z = 6 + t' \end{cases}$

Affirmation : les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(12 ; 7 ; – 13) et B(3 ; 1 ; 2) ainsi que le plan P d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan P.

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$, pour tout entier naturel n.

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.*b*) où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé.

Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.

On admet dans la suite les résultats suivants : $P_{J_3}(B) = \dfrac{1}{30}$ et $P_{J_4}(B) = \dfrac{1}{210}$.

2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\dfrac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

b. Calculer la probabilité de l'événement (N = 3).

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Un triangle

a. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$; $b = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

b. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que : $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z_n + 2$, pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a. Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

On remarquera que : $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$

b. Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$,

où ω désigne le nombre complexe défini à la question 1. *b*.

d. En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que : $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n + 1$, pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points dans le plan muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

2. *a*. Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe *s*, dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω, d'affixe ω.

b. Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle.

3. *a*. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $\Omega A_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. À partir de quelle valeur de n les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?

4. Pour tout entier naturel n, on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonal $A_0 A_1 \ldots A_n A_{n+1}$. Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.

CORRECTION

Exercice 1 6 points Commun à tous les candidats.

Partie A

1. g est la somme de fonction dérivables sur] 0 ; + ∞ [donc est dérivable sur] 0 ; + ∞ [.

$g'(x) = 6x^2 + \dfrac{2}{x}$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est la somme de termes strictement positifs donc $g'(x) > 0$ sur] 0 ; + ∞ [.

g est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} 2x^3 - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

g est continue strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $g(x) = +\infty$ donc il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(0,86) \approx -0,03$

$g(0,87) \approx 0,04$ donc $0,86 < \alpha < 0,87$

$\alpha = 0,87$ à 10^{-2} près par excès.

3. g est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $g(\alpha) = 0$ donc : si $0 < x < \alpha$ alors $g(x) < 0$; $g(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

x	0		α		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

2. $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ donc la courbe C admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

$f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x) - 2x$	‖	$+$	0	$-$	

La courbe C est au dessus de Δ sur] 0 ; 1 [; la courbe C coupe Δ au point d'abscisse 1 ; la courbe C est en dessous de Δ sur] 1 ; + ∞ [

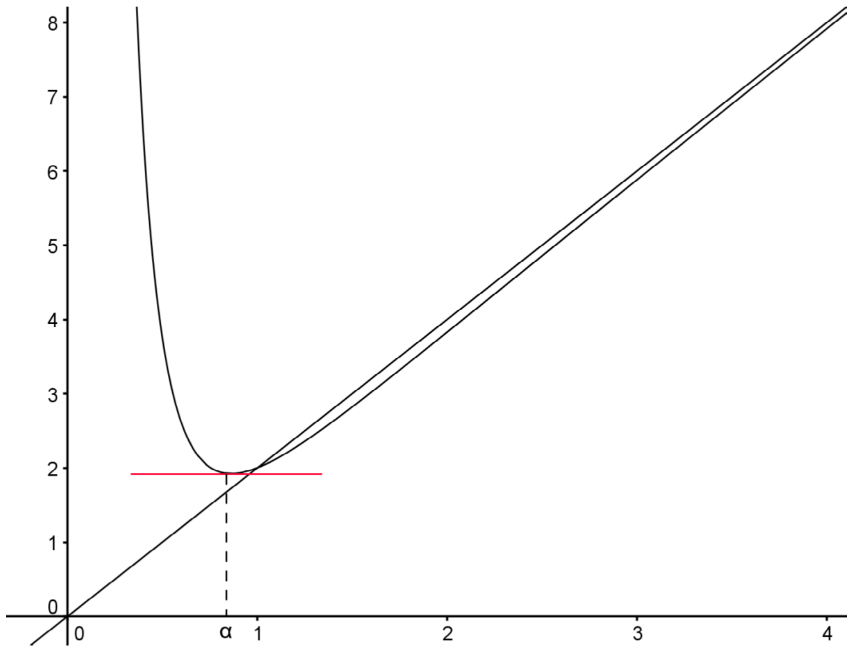
3. $f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 2 - \dfrac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

4.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5.



Partie C

1. l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ a pour mesure $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ en unités d'aire.

1 unité d'aire a pour mesure 2×1 cm^2 donc cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par : $2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. *a*. Soit $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} & u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

donc $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x \right]_1^n - \left[\frac{1}{x} \right]_1^n$

$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln n}{n} - \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$ donc $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$

b. $I_n = 2\left(1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} \right)$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 2$

Exercice 2 4 points Commun à tous les candidats.

1. **Affirmation : VRAIE**

La droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-1)$

La droite D_2 a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(5\,;-2\,;1)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc D_1 et D_2 ne sont pas parallèles

Cherchons si D_1 et D_2 sont sécantes donc cherchons si le système en t et t' admet une solution.

$$\begin{cases} 4+t=8+5t' \\ 6+2t=2-2t' \\ 4-t=6+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+t=8+5t' \\ 4-t=6+t' \\ 6+2t=2-2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-5t'=4 & L_1 \\ t+t'=-2 & L_2 \\ 2t+2t'=-4 & L_3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6t'=-6 & L_2-L_1 \\ t+t'=-2 & L_2 \\ t+t'=-2 & L_3 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t+t'=-2 \\ t+t'=-2 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t-1=-2 \\ t+t'=-2 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=-1 \\ t+t'=-2 \end{cases}.$$

La relation $t+t'=-2$ est vérifiée quand $t=t'=-1$ donc les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes donc les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

2. **Affirmation : VRAIE**

$\vec{n}\,(3\,;2\,;-5)$ est un vecteur normal au plan P.

$\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(9\,;6\,;-15)$ donc $\overrightarrow{BA}=3\,\vec{n}$

La droite (AB) est orthogonale au plan P.

$3\,x_B+2\,y_B-5\,z_B=3\times 3+2-5\times 2=1$ donc $B \in P$ donc le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan P .

3. **Affirmation : FAUSSE**

$u_n=1-\dfrac{1}{n+2}$ donc $u_{n+1}-u_n=1-\dfrac{1}{n+3}-\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

La suite u est croissante.

$v_n=2+\dfrac{1}{n+2}$ donc $v_{n+1}-v_n=2+\dfrac{1}{n+3}-\left(2+\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+2}$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{-1}{(n+2)(n+3)}$ donc $v_{n+1}-v_n<0$

La suite v est décroissante.

$v_n-u_n=2+\dfrac{1}{n+2}-\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n\neq 0$, ces deux suites ne sont pas adjacentes.

4. **Affirmation : VRAIE**

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Vérification : $u_0=1$ donc $u_0\leq 3$. La propriété est vraie pour $n=0$

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire :

c'est-à-dire que si $u_n\leq 3$ alors $u_{n+1}\leq 3$

$u_n\leq 3$ donc $\dfrac{1}{3}u_n+2\leq\dfrac{1}{3}\times 3+2$ soit $u_{n+1}\leq 3$

pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Conclusion : (u_n) est une suite majorée par 3.

Exercice 3 5 points Commun à tous les candidats.

1. $P_{J_1}(B)$ est la probabilité, sachant qu'on a tiré le jeton numéroté 1, d'obtenir une boule blanche.

Cas possibles : on choisit donc une boule parmi les 10 donc 10 cas possibles

Cas favorables : on choisit donc une boule parmi les 4 boules blanches donc 4 cas favorables donc $P_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P_{J_2}(B)$ est la probabilité, sachant qu'on a tiré le jeton numéroté 2, d'obtenir deux boules blanches.

Cas possibles : on choisit donc deux boules parmi les 10 donc $\binom{10}{2}$ = 45 cas possibles

Cas favorables : on choisit donc deux boules parmi les 4 boules blanches donc $\binom{4}{2}$ = 6 cas favorables donc $P_{J_2}(B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

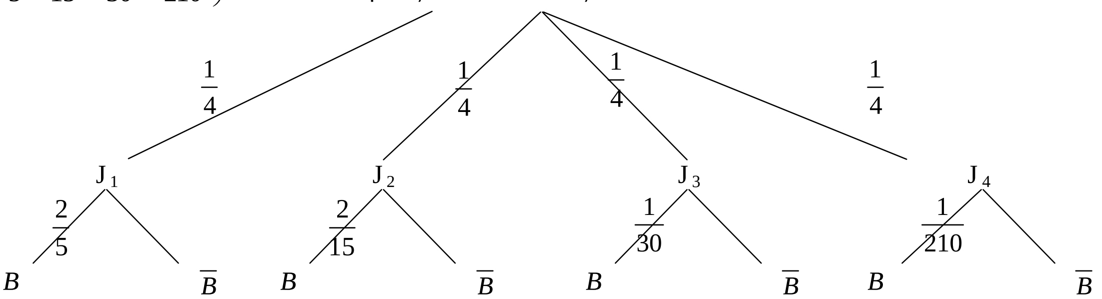
2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(B \cap J_1) + P(B \cap J_2) + P(B \cap J_3) + P(B \cap J_4)$.

$P(B) = P(J_1) \times P_{J_1}(B) + P(J_2) \times P_{J_2}(B) + P(J_3) \times P_{J_3}(B) + P(J_4) \times P_{J_4}(B)$

$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{30} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{210}$

$P(B) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} \right)$ soit $P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7}$ donc $P(B) = \frac{1}{7}$.



3. Sachant qu'on dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches, la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 est $P_B(J_3) = \frac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$

4. *a.* On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

succès : toutes les boules tirées sont blanches $p = \frac{1}{7}$

échec : toutes les boules tirées ne sont pas blanches $q = 1 - p = \frac{6}{7}$

donc la variable aléatoire N qui compte le nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches suit une loi binomiale de paramètres $\left(10 ; \frac{1}{7} \right)$.

b. $p(N = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^7 \approx 0,12$

Exercice 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. Un triangle

a. Trois démonstrations possibles :

Cas 1 : puisque l'énoncé demande un angle géométrique (donc non orienté) on peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = BA \times BC \cos \widehat{ABC}$

$\overrightarrow{BA}$ a pour affixe $-1 - i\sqrt{3}$ donc a pour coordonnées $(-1\,;\,-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $-3 + i\sqrt{3}$ donc a pour coordonnées $(-3\,;\,\sqrt{3})$ donc $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = (-1)\times(-3) + (-\sqrt{3})\times\sqrt{3} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$.

Cas 2 : on évalue une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)$ or $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(-i\sqrt{3})$ donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cas 3 : d'après la figure le triangle ABC semble être rectangle en B

$AB^2 = |1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$BC^2 = |-3 + i\sqrt{3}|^2 = 12$ et $AC^2 = |2 + 2i\sqrt{3}| = 16$

donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ le triangle ABC est rectangle en B donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$.

b. le triangle ABC est rectangle en B donc le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse [AC] donc $\omega = \dfrac{a+c}{2}$ donc l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

a. $z_0 = 0$ donc $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2$

$z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3}$;

$z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times (3 + i\sqrt{3}) + 2$

$z_3 = \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{2} + 2 = 2i\sqrt{3} + 2$

$z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \times (2 + 2i\sqrt{3}) + 2$

$z_4 = (1 + i\sqrt{3}) \times (1 + i\sqrt{3}) + 2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 2$

$z_4 = 2i\sqrt{3}$

Les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives : $3 + i\sqrt{3}$; $2 + 2i\sqrt{3}$ et $2i\sqrt{3}$

b. $A_1A_2^{\,2} = |3 + i\sqrt{3} - 2|^2 = |1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$A_2A_3^{\,2} = |2 + 2i\sqrt{3} - (3 + i\sqrt{3})|^2 = |-1 + i\sqrt{3}|^2 = 4$

$A_3A_4^{\,2} = |2i\sqrt{3} - (2 + 2i\sqrt{3})|^2 = |-2|^2 = 4$

donc les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$ sont égales.

c. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega$

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z_n-\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{2}$$
$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z_n-\frac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z_n+1-\mathrm{i}\sqrt{3}$$

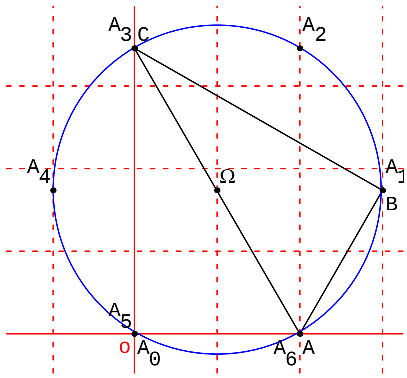
$$z_{n+1}-\omega=z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z_n+2-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,z_n+1-\mathrm{i}\sqrt{3}$$

donc pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1}-\omega=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

d. Soit r la transformation d'écriture complexe $z'-\omega=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z-\omega)$

$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc la transformation r est une rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{3}$

pour tout entier naturel n, on a : $z_{n+1}-\omega=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$ donc le point A_{n+1} est l'image du point A_n par la rotation r de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{3}$.



e. $z_{n+1}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$ et $z_{n+2}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-\omega)$

donc $z_{n+2}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$

$z_{n+2}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(z_n-\omega)$ donc $z_{n+4}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(z_{n+2}-\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(z_n-\omega)$

$z_{n+4}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}(z_n-\omega)$

$z_{n+6}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}(z_{n+4}-\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}(z_n-\omega)$

$z_{n+6}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi}(z_n-\omega)=z_n-\omega$ donc $z_{n+6}=z_n$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6}=A_n$.

On aurait pu utiliser la transformation $f=r\circ r\circ r\circ r\circ r\circ r$ mais la composée de rotations est un déplacement (pas forcément une rotation) donc f est un déplacement d'angle la somme des angles des différentes rotations soit 2π donc est soit une translation soit l'identité du plan.
$f(\Omega)=\Omega$ donc f admet un point invariant donc f est l'identité du plan.
$f(A_n)=r\circ r\circ r\circ r\circ r\circ r(A_n)=r\circ r\circ r\circ r\circ r(A_{n+1})=\ldots=A_{n+6}$
$f(A_n)=A_n$ donc pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6}=A_n$.

$A_{n+6}=A_n$ donc $A_{n+6k}=A_n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
$2012=6\times 335+2$ donc $A_{2012}=A_2$.

3. $z_{n+1}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$ et $z_{n+2}-\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-\omega)$ donc par différence membre à membre :

$z_{n+2}-\omega-(z_{n+1}-\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-\omega)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_n-\omega)$

$z_{n+2}-z_{n+1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-z_n)$

donc la suite $u_n=z_{n+1}-z_n$ est une suite géométrique de raison $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, de premier terme $u_0=z_1-z_0=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$;
donc $u_n=q^n u_0$ donc $|u_n|=|q^n|\,|u_0|$ or $|q|=1$ donc $|u_n|=|u_0|=2$ donc pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$ est 2.

Exercice 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. $z_0 = 0$ donc $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 + 1 = 1$

$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 + 1 = \frac{1+i}{2} + 1 = \frac{3+i}{2}$

$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 + 1 = \frac{1+i}{2} \times \frac{3+i}{2} + 1 = \frac{3+i+3i-1}{4} + 1 = \frac{3+2i}{2}$

Les points A_1, A_2 et A_3 ont pour affixes respectives : 1 ; $\frac{3+i}{2}$ et $\frac{3+2i}{2}$

2. *a*. Soit *s* la transformation d'écriture complexe $z' = \frac{1+i}{2} z + 1$.

s a une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$ avec $a \neq 0$ donc *s* est une similitude directe de rapport $|a|$ d'angle arg a.

$\frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc la transformation *s* est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$ de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le centre de *s* est le point invariant donc son affixe est solution de $z' = z$ soit $z = \frac{1+i}{2} z + 1 \Leftrightarrow 2z = (1+i) z + 2 \Leftrightarrow z(1-i) = 2$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{1-i} = 1 + i$ donc le centre de *s* est le point Ω d'affixe $\omega = 1 + i$.

b. $s(A_n) = A_{n+1}$

donc $\Omega A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n$ et $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\overrightarrow{A_n A_{n+1}} = \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} - \overrightarrow{\Omega A_n}$

donc $A_n A_{n+1}^2 = \Omega A_{n+1}^2 + \Omega A_n^2 - 2\, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}} . \overrightarrow{\Omega A_n}$

$A_n A_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \Omega A_n^2 + \Omega A_n^2 - 2\, \Omega A_{n+1} \times \Omega A_n \cos(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}, \overrightarrow{\Omega A_n})$

$A_n A_{n+1}^2 = \frac{3}{2} \Omega A_n^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$A_n A_{n+1}^2 = \frac{3}{2} \Omega A_n^2 - \Omega A_n^2 = \frac{1}{2} \Omega A_n^2$.

donc $\Omega A_{n+1} = A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n$ de plus $\Omega A_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2 = \Omega A_n^2$ donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_{n+1}

Autre démonstration

On pouvait aussi appeler H la projection orthogonale de A_{n+1} sur $[\Omega A_n]$

$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donc le triangle $\Omega H A_{n+1}$ est isocèle rectangle en H et $\Omega H = HA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_{n+1} = \frac{1}{2} \Omega A_n$ donc

H est le milieu de ΩA_n donc $\Omega H = HA_{n+1} = HA_n$,

H est le centre du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$, $[\Omega A_n]$ est un diamètre du cercle donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}

$(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle en A_{n+1}

3. *a*. $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1$ et $\omega = \frac{1+i}{2} \omega + 1$ donc $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i}{2} (z_n - \omega)$

la suite $u_n = z_{n+1} - \omega$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$, de premier terme $u_0 = z_0 - \omega = -\omega$

donc $u_n = q^n u_0$ donc $|u_n| = |q|^n |u_0|$ or $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|u_0| = |1+i| = \sqrt{2}$.

$|u_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ donc pour tout entier naturel *n*, on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. Les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 quand $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 0{,}001$

soit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} < 0{,}001 \Leftrightarrow \sqrt{2}^{\,n-1} > 1000 \Leftrightarrow (n-1)\ln\sqrt{2} > \ln 1000$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 1000}{\ln\sqrt{2}} + 1$.

$\frac{\ln 1000}{\ln\sqrt{2}} + 1 \approx 20{,}9$ donc à partir de $n = 21$, les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001

4. Pour tout entier naturel n, $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

a_n est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$L_n = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

$-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$

donc $\lim_{x\to+\infty} L_n = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)$

5. $z_{n+1} - \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_n - \omega)$ et $z_{n+2} - \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_{n+1} - \omega)$

donc $z_{n+2} - \omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 (z_n - \omega)$ soit $z_{n+2} - \omega = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_n - \omega)$

$z_{n+4} - \omega = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_n - \omega)$ donc $z_{n+4} - \omega = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 (z_n - \omega)$

$z_{n+4} - \omega = -\frac{1}{4}(z_n - \omega)$ soit $\overrightarrow{\Omega A_{n+4}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A_n}$ donc pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.