Droite des milieux dans un triangle

Voici un théorème connu sous le nom de « théorème des milieux dans un triangle ».

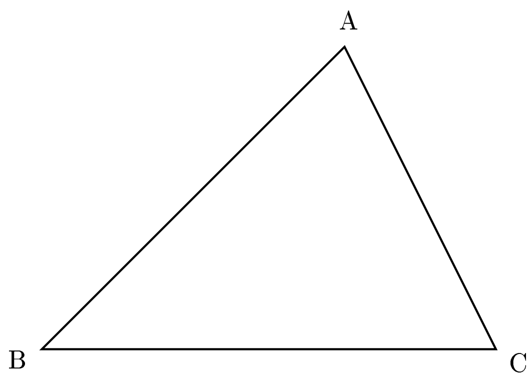
1 Théorème

La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et la distance entre les deux milieux est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

2 Démonstration

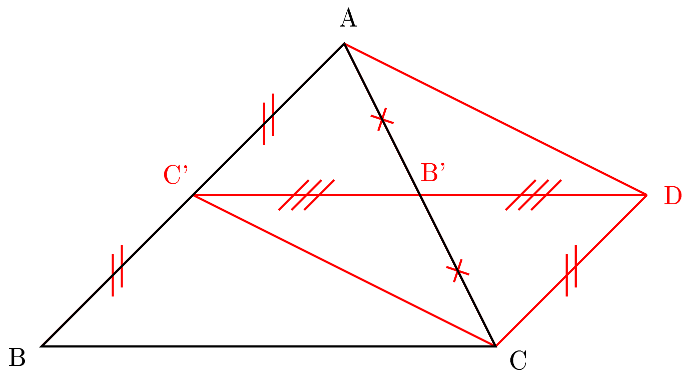
Soit ABC un triangle quelconque.
On appelle B' le milieu du côté [AC] et C' le milieu du côté [AB].
On appelle D le symétrique du point C' par rapport au point B'.

1. Placer les points B', C' et D sur la figure jointe.
   Compléter cette figure au fil des questions.
2. Démontrer que le quadrilatère AC'CD est un parallélogramme.
3. En déduire que le quadrilatère BCDC' est un parallélogramme puis que les droites (B'C') et (BC) sont parallèles.
4. Justifier que C'B' $= \frac{1}{2}$ C'D et en déduire que C'B' $= \frac{1}{2}$ BC.



3 Corrigé

1. On complète la figure :



2.
- Le point D est le symétrique du point C' par rapport au point B' donc B' est le milieu de [C'D]. **(6)**
- D'après le texte, le point B' est le milieu de [AC].

Le quadrilatère AC'CD a ses diagonales [AC] et [C'D] qui ont le même milieu B', donc le quadrilatère AC'CD est un parallélogramme. **(4)**

3. Comme AC'CD est un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles et égaux donc (AC') et (DC) sont parallèles et AC' = DC. **(2)** **(3)**

- Les droites (AC') et (CD) sont parallèles et les trois points A, C' et B sont alignés donc on peut dire que les droites (C'B) et (DC) sont parallèles.
- D'après le texte, le point C' est le milieu du segment [AB] donc AC' = C'B. On vient de voir que AC' = DC. On peut donc en déduire que C'B = DC. **(1)**

Le quadrilatère BCDC' a deux côtés [C'B] et [DC] qui sont parallèles et égaux. Ce quadrilatère BCDC' n'est pas croisé donc BCDC' est un parallélogramme. **(5)**
On en déduit que les droites (BC) et (DC') sont parallèles, donc que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles. **(2)**

4.
- On a vu que B' était le milieu de [C'D] donc $\text{C'B'} = \frac{1}{2}\text{C'D}$.
- On a démontré que BCDC' était un parallélogramme, donc BC = C'D. **(3)**

$$\left.\begin{array}{l} \text{C'B'} = \frac{1}{2}\text{C'D} \\ \text{BC} = \text{C'D} \end{array}\right\} \text{donc } \text{C'B'} = \frac{1}{2}\text{BC}\ \textbf{(1)}$$

4 Propriétés utilisées

1. Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.
2. Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles (par définition).
3. Un parallélogramme a ses côtés opposés égaux deux à deux.
4. Un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
5. Un quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles et égaux est un parallélogramme.
6. Le point M est le symétrique du point N par rapport au point O signifie que O est le milieu du segment [MN].