Pondichéry avril 2010

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. *a*. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

CORRECTION

1. Si $n = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$u_1 = \frac{1}{3} u_0 + 0 - 2$ soit $u_1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

Si $n = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$u_2 = \frac{1}{3} u_1 + 1 - 2$ soit $u_2 = -\frac{14}{9}$

Si $n = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$u_3 = \frac{1}{3} u_2 + 2 - 2$ soit $u_3 = -\frac{14}{27}$

2. *a*. Si $n = 3$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ devient :

$u_4 = \frac{1}{3} u_3 + 3 - 2$ soit $u_4 = \frac{67}{81}$ donc $u_4 \geq 0$

La propriété est vraie pour $n = 4$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geq 4$, si $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq 0$.

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$, $n \geq 4$ donc $n - 2 > 0$ de plus $\frac{1}{3} u_n \geq 0$

la somme de nombres positifs étant un nombre positif, donc $\frac{1}{3} u_n + n - 2 \geq 0$ soit $u_{n+1} \geq 0$.

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 4$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

$u_5 = \frac{1}{3} u_4 + 4 - 2 = \frac{553}{243}$ soit $u_5 \approx 2{,}28$ donc $u_5 \geq 5 - 3$

La propriété est vraie pour $n = 5$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geq 5$, si $u_n \geq n - 3$ alors $u_{n+1} \geq n + 1 - 3$ ou encore $u_{n+1} \geq n - 2$

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$, $n \geq 5$ donc $u_n \geq n - 3$

donc $u_{n+1} \geq \frac{1}{3}(n - 3) + n - 2$ soit $u_{n+1} \geq \frac{1}{3} n + n - 1 - 2$

$n \geq 5$ donc $\frac{1}{3} n \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1 + n - 1 - 2$ soit $u_{n+1} \geq n - 2$

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 5$.

c. $\lim_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$ et pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$ donc d'après le théorème de comparaison :

$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3\. *a.* $v_{n+1} = -2\,u_{n+1} + 3\,(n+1) - \frac{21}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3\,n + 3 - \frac{21}{2}$

$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 2\,n + 4 + 3\,n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} \times (-2\,u_n) + \frac{1}{3} \times 3\,n - \frac{1}{3} \times \frac{21}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(-2\,u_n + 3\,n - \frac{21}{2}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}\,v_n$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2\,u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$ donc $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

b. $v_n = -2\,u_n + 3\,n - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $-2\,u_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\,n + \frac{21}{2}$ soit $2\,u_n = \frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\,n - \frac{21}{2}$

$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\,n - \frac{21}{2}\right)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\,n - \frac{21}{4}$

c. $\Sigma_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = -\frac{25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ soit $\Sigma_n = -\frac{75}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$v_0 = -2\,u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2}$

$v_1 = -2\,u_1 + 3 \times 1 - \frac{21}{2}$

$v_2 = -2\,u_2 + 3 \times 2 - \frac{21}{2}$

…

$v_n = -2\,u_n + 3 \times n - \frac{21}{2}$

---

donc par addition terme à terme :

$v_0 + v_1 + \ldots + v_n = -2\,(u_0 + u_1 + \ldots + u_n) + 3\,(0 + 1 + \ldots + n)$

$\Sigma_n = -2\,\mathrm{S}_n + 3\,(0 + 1 + \ldots + n) - \frac{21}{2}(n+1)$

$\Sigma_n = -2\,\mathrm{S}_n + 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{21}{2}(n+1)$

$\Sigma_n = -2\,\mathrm{S}_n + \frac{3\,n^2 + 3\,n - 21\,n - 21}{2}$

$\Sigma_n = -2\,\mathrm{S}_n + \frac{3\,n^2 - 18\,n - 21}{2}$

donc $-2\,\mathrm{S}_n + 3\,\frac{n^2 - 6\,n - 7}{2} = -\frac{75}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$2\,\mathrm{S}_n = \frac{75}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3\,\frac{n^2 - 6\,n - 7}{2}$

$\mathrm{S}_n = \frac{75}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 3\,\frac{n^2 - 6\,n - 7}{2}$