Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'application f du plan dans lui même qui, â tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$,

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que f (M) = M.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

a. Exprimer a sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω.

a. A l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$.

b. Montrer que $z' - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = (z - 1)(z + 1 - \mathrm{i})$.

c. En déduire l'ensemble Γ_3.

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

a. Exprimer $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction d'un argument de z.

b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

CORRECTION

1. $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$

Γ_1 est l'ensemble des points O et Ω du plan.

2. *a*. $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

b. Les affixes des antécédents de A par f sont solutions de l'équation : $z^2 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Mettons z sous forme exponentielle, il existe un réel r strictement positif et un réel θ tels que $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $r^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc en égalant modules et arguments : $r^2 = 2$ et $2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $r = \sqrt{2}$ et soit $\theta = -\frac{\pi}{8} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) soit $\theta = \pi - \frac{\pi}{8} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). Les antécédents de A sont les points d'affixes $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$.

3. Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels

z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z^2$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (x + \mathrm{i}\,y)^2$ imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,x\,y$ imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$

Γ_2 est donc la réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω.

a. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit z_1 l'affixe de l'image de M par la rotation r

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est : $z_1 - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$

L'écriture complexe de r est $z_1 - 1 = \mathrm{i}(z - 1)$ soit $z_1 = \mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i}$

Le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω $\Leftrightarrow r(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ et $\mathrm{M} \neq \Omega \Leftrightarrow z_1 = z^2 \Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i} = z^2$ et $z \neq 1$

M est un point de $\Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$.

b. $(z-1)(z+1-\mathrm{i}) = (z-1)(z+1) - \mathrm{i}(z-1) \Leftrightarrow (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = z^2 - 1 - \mathrm{i}\,z + \mathrm{i} \Leftrightarrow (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i}$

c. M est un point de $\Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-\mathrm{i}) = 0$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z = -1 + \mathrm{i}$

L'ensemble Γ_3 est réduit au point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$.

5. *a*. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)$ à 2π près $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right)$ à 2π près $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(z)$ à 2π près.

b. M étant distinct de O et de Ω, les points O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$ à 2π près ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi$ à 2π près et $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ et $\mathrm{M} \neq \Omega \Leftrightarrow \arg z = 0 + 2k\pi$ ou $\arg z = \pi + 2k\pi$ et $z \neq 0$ et $z \neq 1 \Leftrightarrow z$ est un réel différent de 0 et 1.

L'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés est l'axe des réels privé de O et Ω.