

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,4 v_n - 0,05 v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
 - a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente.

CORRECTION

1. a. f est définie dérivable sur $[0 ; 8]$ et $f'(x) = 1,4 - 0,1x$
 donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 8]$ d'où le tableau de variation de f :

x	0	8
$f'(x)$	+	
f	0	10,56



b. Vérification : $v_0 = 6$ et $v_1 = 6,84$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 8$.
 La propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire : c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$ si $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$ alors $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 8$

$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; 8]$ donc $0 \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(8)$ soit $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 8$
 pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. La suite (v_n) est croissante majorée par 8 donc est convergente.