Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^{x}$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que φ' = φ, et φ(0) = 1.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a\,y$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = a\,y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a\,y$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2\,y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2\,y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i.

On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe : $z' = -\mathrm{i}\,\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport – 2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée H o S.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M" l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM''} = -2\,\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM''} = 2\,\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E′, image de E par f

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et − 1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et −1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre [A,B].

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H′ de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.

a. Vérifier que H appartient à (d) et que H′ appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (HH′) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est- à- dire la distance HH′.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$.

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions dérivables) et $f'(x) = a\,e^{ax}$ donc $f'(x) = a\,f(x)$ donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a\,y$.

b. h est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables), $h'(x) = g'(x)\,e^{-ax} + g(x) \times (-a)\,e^{-ax}$

donc $h'(x) = [g'(x) - a\,g(x)]\,e^{-ax}$.
or g une solution de l'équation $y' = a\,y$ donc $g'(x) - a\,g(x) = 0$ donc $h'(x) = 0$ donc h est une fonction constante.

c. Si g une solution de l'équation $y' = a\,y$, alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$ est une fonction constante, donc il existe un réel C tel que $h(x) = C$ donc $g(x)\,e^{-ax} = C$ donc $g(x) = C\,e^{-ax}$.
Réciproquement, d'après la question **1. *a.*** la fonction g définie sur R par $g(x) = C\,e^{ax}$ est solution de (E) donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $g(x) = C\,e^{ax}$.

2. *a.* la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est une solution f_0 de (E) donc $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x$

or $f_0'(x) = -a\sin x + b\cos x$ donc $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $-a\sin x + b\cos x = 2\,a\cos x + 2\,b\sin x + \cos x$
donc $-(a + 2\,b)\sin x + (b - 2\,a - 1)\cos x = 0$
La relation est vraie pour tout x donc en particulier pour $x = 0$ soit $-(a + 2\,b)\sin 0 + (b - 2\,a - 1)\cos 0 = 0$ donc $b - 2\,a - 1 = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ soit $-(a + 2\,b)\sin\frac{\pi}{2} + (b - 2\,a - 1)\cos\frac{\pi}{2} = 0$ donc $-(a + 2\,b) = 0$ donc $a + 2\,b = 0$.

En résolvant le système $\begin{cases} -2\,a + b = 1 \\ a + 2\,b = 0 \end{cases}$ alors $-2\,L_1 + L_2$ donne $5\,a = -2$ et $5\,b = 1$ donc $a = \frac{-2}{5}$ et $2\,L_2 + L_1$ donne $5\,b = 1$ soit $b = \frac{1}{5}$ donc $f_0(x) = \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x)$

Vérification : pour tout x réel : $f_0'(x) = \frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)$ or $2\,f_0(x) + \cos x = \frac{1}{5}(-4\cos x + 2\sin x) + \cos x = \frac{1}{5}(2\sin x + \cos x)$ donc $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x$

b. L'équation différentielle (E_0) : $y' = 2\,y$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = C\,e^{2x}$.
c. $f - f_0$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow (f - f_0)' = 2\,(f - f_0) \Leftrightarrow f' - f_0' = 2\,f - 2\,f_0$ or $f_0'(x) = 2\,f_0(x) + \cos x$
$f - f_0$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow$ pour tout x réel : $f' = 2\,f + \cos x \Leftrightarrow f$ est solution de (E_0).

d. f est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f - f_0$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow$ pour tout x réel : $(f - f_0)(x) = C\,e^{2x}$
$\Leftrightarrow$ pour tout x réel : $f(x) = f_0(x) + C\,e^{2x}$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x) + C\,e^{2x}$

e. k est solution de (E) donc il existe une constante C telle que pour tout x réel : $k(x) = \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x) + C\,e^{2x}$

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $\frac{1}{5}\left[-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + C\,e^{\pi} = 0$ soit $\frac{1}{5} + C\,e^{\pi} = 0$ donc $C = -\frac{1}{5}\,e^{-\pi}$

pour tout x réel : $k(x) = \frac{1}{5}\left[-2\cos x + \sin x - e^{2x-\pi}\right]$

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. S est une réflexion donc une similitude indirecte donc son écriture complexe est de la forme $z' = a\bar{z} + b$

S est la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) donc S(A) = A et S(B) = B donc $\begin{cases} 1 = a + b \\ \mathrm{i} = -a\,\mathrm{i} + b \end{cases}$ donc par différence membre à membre

$(1 + \mathrm{i})\, a = (1 - \mathrm{i})$ donc $2\, a = (1 - \mathrm{i})^2$ donc $a = -\mathrm{i}$, $a + b = 1$ donc $b = 1 + \mathrm{i}$.

L'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe : $z' = -\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. L'écriture complexe de H est $z' - 1 = -2\,(z - 1)$ soit $z' = -2\,z + 1$

3. *a*. f = H o S donc f est la composée de deux similitudes l'une S indirecte, l'autre H directe donc f est une similitude indirecte.

b. $\mathrm{M}\,(z) \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathrm{M}'\,(z') \xrightarrow{\mathrm{H}} \mathrm{M}''\,(z'')$ avec $z'' = -2\,z' + 1$ et $z' = -\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$ donc $z'' = -2\,(-\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 + \mathrm{i}) + 1$

soit $z'' = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} - 1 - 2\,\mathrm{i}$. L'écriture complexe de f est $z' = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} - 1 - 2\,\mathrm{i}$.

4. *a*. $z'' = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 1 - 2\,\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ a pour affixe $z'' - 1 = 2\,\mathrm{i}\,\bar{z} - 2\,\mathrm{i} = 2\,\mathrm{i}\,(\bar{z} - 1)$

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels alors $z'' - 1 = 2\,\mathrm{i}\,[(x - 1) - \mathrm{i}\,y] = 2\,y + 2\,\mathrm{i}\,(x - 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ a pour coordonnées $(2\,y\,;\,2\,x - 2)$; $\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,y = -2\,(x - 1) \\ 2\,(x - 1) = -2\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ x - 1 = -y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1$

Le point A (1 ; 0) appartient à la droite d'équation $x + y = 1$ ainsi que le point B (0 ; 1) donc cette droite est la droite (AB)

$\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$

b. De même $\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,y = 2\,(x - 1) \\ 2\,(x - 1) = 2\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ de coordonnées (– 1 ; 1).

Soit Δ la droite d'équation $y = x + 1$, $\mathrm{A} \in \Delta$ ainsi que le point C de coordonnées (0 ; – 1) un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ de coordonnées (– 1 ; – 1)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 0$ donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Δ est la perpendiculaire en A à (AB).

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -\mathrm{i}$, l'affixe du point E′, image de E par f est $z' = \dfrac{1}{2}\left(-\mathrm{i}+\dfrac{1}{-\mathrm{i}}\right) = 0$ donc E' = O

2. $M' = M \Leftrightarrow z' = z$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z \Leftrightarrow z+\dfrac{1}{z} = 2z \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

3. *a.* Pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et −1, on a : $z' - 1 = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z^2+1-2z}{z}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(z-1)^2}{z}$

$z' + 1 = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z^2+1+2z}{z}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(z+1)^2}{z}$ donc $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{(z+1)^2}{z}}{\frac{1}{2}\frac{(z-1)^2}{z}} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = \left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^2 = \dfrac{M\mathrm{B}^2}{M\mathrm{A}^2}$ et $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = \arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right)$ donc $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = \arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

donc $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = 2\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ donc $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = 2(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

4. si M est un point de Δ distinct du point O, alors MA = MB donc $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = 1$ donc M' est un point de Δ.

5. *a.* Si le point M appartient à Γ alors $(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}) = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) donc $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = \pi + 2n\pi + 2k\pi$

donc $(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc le point M' appartient à la droite (AB) et plus précisément à [AB] privé de A et B.

b. (AB) est la droite d'équation $y = 0$ donc tout point M' de (AB) *a* une affixe réelle α.

M' *a* au moins un antécédent d'affixe $z \neq 0$ par f si, et seulement si : $\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \alpha \Leftrightarrow 2\alpha z = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 - 2\alpha z + 1 = 0$

or $\Delta = 4\alpha^2 - 4$, $4\alpha^2 - 4$ est un réel donc cette équation admet au moins une solution complexe, non nulle donc tout point de (AB) *a* au moins un antécédent par f .

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1. la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$.

On considère le point A de coordonnées (− 2 ; 8 ; 4) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 5 ; − 1).

Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc $\begin{cases} x+2=k \\ y-8=5k \\ z-4=-k \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-2+k \\ y=8+5k \\ z=4-k \end{cases}$

avec k réel quelconque.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal à (P)

Le vecteur $\vec{n'}$ de coordonnées (1 ; 0 ; – 2) est un vecteur normal à (Q)

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs sont non colinéaires donc les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (d)

M ∈ (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=7 \\ x-2z=11 \end{cases}$ soit en posant $z = t$ (avec $t \in \mathbb{R}$), $x = 11 + 2z = 11 + 2t$; $y = x - z - 7$ donc $y = t + 4$

Une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (d') est $\begin{cases} x=2t+11 \\ y=t+4 \\ z=t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$)

Soit E le point de coordonnées (11 ; 4 ; 0) E est le point de (d ') correspondant au paramètre $t = 0$.

(d') est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{EM} = k\,\vec{v}$ donc le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (2 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de (d').

3. Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs sont non colinéaires donc les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles, elles sont soit coplanaires et donc sécantes soit non coplanaires et donc n'ont pas de point d'intersection

Déterminons s'il existe le point d'intersection de (d) et (d ').

M ∈(d) donc il existe un réel k tel que les coordonnées de M soient : $\begin{cases} x=-2+k \\ y=8+5k \\ z=4-k \end{cases}$

M ∈(d ') donc il existe un réel t tel que les coordonnées de M soient : $\begin{cases} x=2t+11 \\ y=t+4 \\ z=t \end{cases}$

donc $\begin{cases} x=-2+k=2t+11 \\ y=8+5k=t+4 \\ z=4-k=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t+13 \\ 5k=t-4 \\ -k=t-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1+L_3 \quad 0=3t+9 \\ L_2-L_3 \quad 6k=0 \\ -k=t-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ k=0 \\ -k=t-4 \end{cases}$

La dernière condition n'est pas vérifiée donc les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. *a*. si $k = -1$, le point de (d) correspondant a pour coordonnées (− 3 ; 3 ; 5) donc H ∈ (d).
si $t = -4$, le point de (d') correspondant a pour coordonnées (3 ; 0 ; − 4) donc H' ∈ (d ').

b. $\overrightarrow{HH'}$ a pour coordonnées (6 ; – 3 ; – 9). $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} = 6 \times 1 - 3 \times 5 - 9 \times (-1) = 0$

$\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 - 3 \times 1 - 9 \times 1 = 0$ donc la droite (HH′) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. $HH'^2 = 6^2 + (-3)^2 + (-9)^2 = 126$ donc la distance entre les droites (d) et (d') est $\sqrt{126}$.

5. $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'}) \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$ donc $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'} + HH'^2 = 126$ donc $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'} = 0$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$ est le plan perpendiculaire en H à (HH').

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

1\. *a*. Soit $X = x^2 + 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

1\. *b*. $f_1'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x \geq 0$ donc $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq 0$ et $f_1'(x) \geq 2$ soit $f_1'(x) > 0$

1\. *c*.

x	0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
f_1	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2\. *a*. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

Soit $X = x^2 + 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

2\. *b*. $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{n}\ln(x^2+1)$ donc $f_n'(x) = 2 + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$

$x \geq 0$ et $n > 0$ donc $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq 0$ et $f_n'(x) \geq 2$ soit $f_n'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2\. *c*. f_n est définie continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $f_n([0 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$
$0 \in f_n([0 ; +\infty[)$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0 ; +\infty[$.

2\. *d*. $f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n}$; $f_n(1) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc $0 < \alpha_n < 1$.

3\. α_{n+1} est solution de $f_{n+1}(x) = 0$ donc $2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n+1}\ln(\alpha_n^2 + 1) = 0$ donc $\dfrac{1}{n+1}\ln(\alpha_n^2+1) = 2 - 2\alpha_{n+1}$

$\ln(\alpha_n^2 + 1) = (n+1)(2 - 2\alpha_{n+1})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n}\ln(\alpha_n^2+1) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{1}{n}(n+1)(2 - 2\alpha_{n+1})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = -(2 - 2\alpha_{n+1}) + \dfrac{n+1}{n}(2 - 2\alpha_{n+1})$

$f_n(\alpha_{n+1}) = (2 - 2\alpha_{n+1})\left(\dfrac{n+1}{n} - 1\right) = 2(1 - \alpha_{n+1})\dfrac{1}{n}$

Pour tout n, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1 - \alpha_{n+1} > 0$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4\. *a*. $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$ de plus f_n est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1} < 1$

La suite (α_n) est croissante.

x	0	α_n	α_{n+1}	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$				
f_n	-2	0	$\nearrow$		$+\infty$

b. (α_n) est croissante majorée par 1 donc est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$ donc $1 < \alpha_n^2 + 1 < 2$ d'où $0 < \ln(\alpha_n^2 + 1) < \ln 2$ donc $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} < \dfrac{\ln 2}{2n}$

D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln 2}{2n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$