

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.

Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit (E) $5x + 6y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.

Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(18k + 3, -15k - 2)$ où k est un entier relatif.

2. Le reste de la division euclidienne de 32 012 par 7 est égal à 6.

Pour les questions suivantes, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe $2 - i$ et B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le point C est le milieu du segment [AB].

3. Le point C est l'image du point O par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit f la similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (-1 + i)z$.

4. La transformation composée $f \circ f$ transforme la droite (AB) en une droite qui est perpendiculaire à (AB).

5. La transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1 - i)z + 3 - i$, est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

CORRECTION

1. **Affirmation fausse**

Contre exemple : $5 \times 9 + 6 \times (-7) = 45 - 42 = 3$ or il n'existe pas d'entier k tel que $9 = 18k + 3$ donc l'affirmation est fausse

Autre solution : $\begin{cases} 5x + 6y = 3 \\ 5 \times 9 + 6 \times (-7) = 3 \end{cases}$ donc par différence terme à terme :

$$5(x - 9) + 6(y + 7) = 0 \text{ donc } 5(x - 9) = -6(y + 7)$$

$$y + 7 \text{ est un entier donc } 6 \text{ divise } 5(x - 9)$$

5 et 6 sont premiers entre eux donc 6 divise $x - 9$ donc il existe un entier k tel que $x - 9 = 6k$

En remplaçant $x - 9$ par $6k$ dans $5(x - 9) = -6(y + 7)$ alors $y + 7 = -5k$

$$\text{donc } x = 6k + 9 \text{ et } y = -5k - 7$$

$$\text{Vérification : si } x = 6k + 9 \text{ et } y = -5k - 7 \text{ alors } 5x + 6y = 3$$

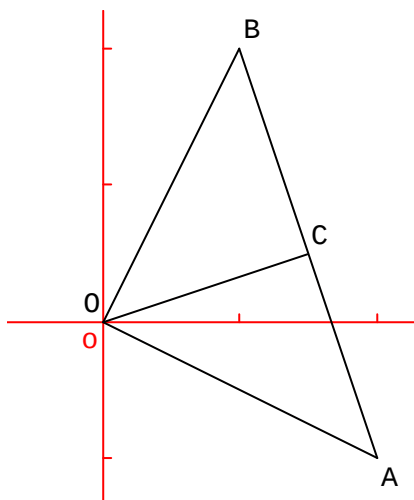
donc les solutions de $5x + 6y = 3$ sont les couples $(6k + 9, -5k - 2)$ où k est un entier relatif.

Les couples solutions donnés correspondent à k de la forme $3n + 1$

2. **Affirmation fausse**

$32012 = 7 \times 4573 + 1$. Le reste de la division euclidienne de 32 012 par 7 est égal à 1.

3. **Affirmation fausse**



B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc le triangle OAB est un triangle direct, rectangle isocèle en O.

C est le milieu de l'hypoténuse [AB] donc le triangle OAC est un triangle direct, rectangle isocèle en C.

A partir de là, 3 possibilités :

Possibilité 1 : C est l'image du point O par la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Possibilité 2 : $AB = \sqrt{2} OA$ donc $AC = \frac{\sqrt{2}}{2} OA$ donc $\frac{AC}{AO} \neq \sqrt{2}$ donc l'affirmation est fausse

Possibilité 3 : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}) \neq -\frac{\pi}{2}$ donc l'affirmation est fausse

4. Affirmation vraie

$-1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$ donc f est la similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$

$f \circ f$ est donc la similitude directe de centre O de rapport $(\sqrt{2})^2$ d'angle $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$ soit $\frac{3\pi}{2}$ donc $f \circ f$ transforme toute droite en une droite perpendiculaire

5. Affirmation fausse

$$(1-i)(2-i) + 3-i = 2-i-2i-1+3-i$$

$$\text{donc } (1-i)(2-i) + 3-i = 5-4i$$

si $z = 2-i$ alors $(1-i)z + 3-i \neq z$ donc A n'est pas le centre de la similitude.

Centre de la similitude :

$$(1-i)z + 3-i = z \Leftrightarrow -iz + 3-i = 0 \Leftrightarrow -iz = -3+i \Leftrightarrow z = (-3+i)i \Leftrightarrow z = -1+3i$$

$$(1-i) = \sqrt{2} e^{i \frac{-\pi}{4}}$$

La transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1-i)z + 3-i$, est la similitude directe de centre $\Omega(-1+3i)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.