Métropole 23 juin 2009
EXERCICE 1 4 points
Commun à tous les candidats
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (un).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n > 1$:

$$n\, w_n = (n+1)\, w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x\,e^{-x})$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$. On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. Première méthode

a. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$.

b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$.

2. Deuxième méthode

a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx$ en fonction de λ.

b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1 + u) \leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leq -\lambda\,e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

3. Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. ***a.*** On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M′ milieu du segment $[M M_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$. Le point M′ est appelé l'image du point M.

1. ***a.*** Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ à 2π près.

b. Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
Construire le point A′ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. ***a.*** Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M′ a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b. Soient B et C les points d'affixes respectives $2\,i$ et $-2\,i$. Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.

c. Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que M′ = M.

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M′ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. ***a.*** Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.

b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. Soit n un nombre entier naturel.

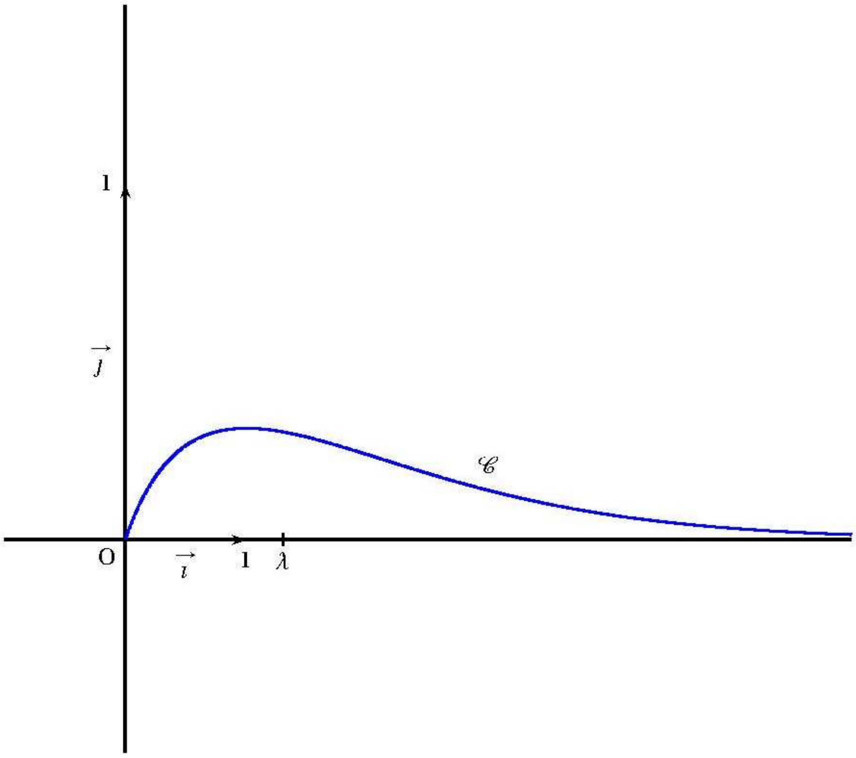
a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).
Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?

3. Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

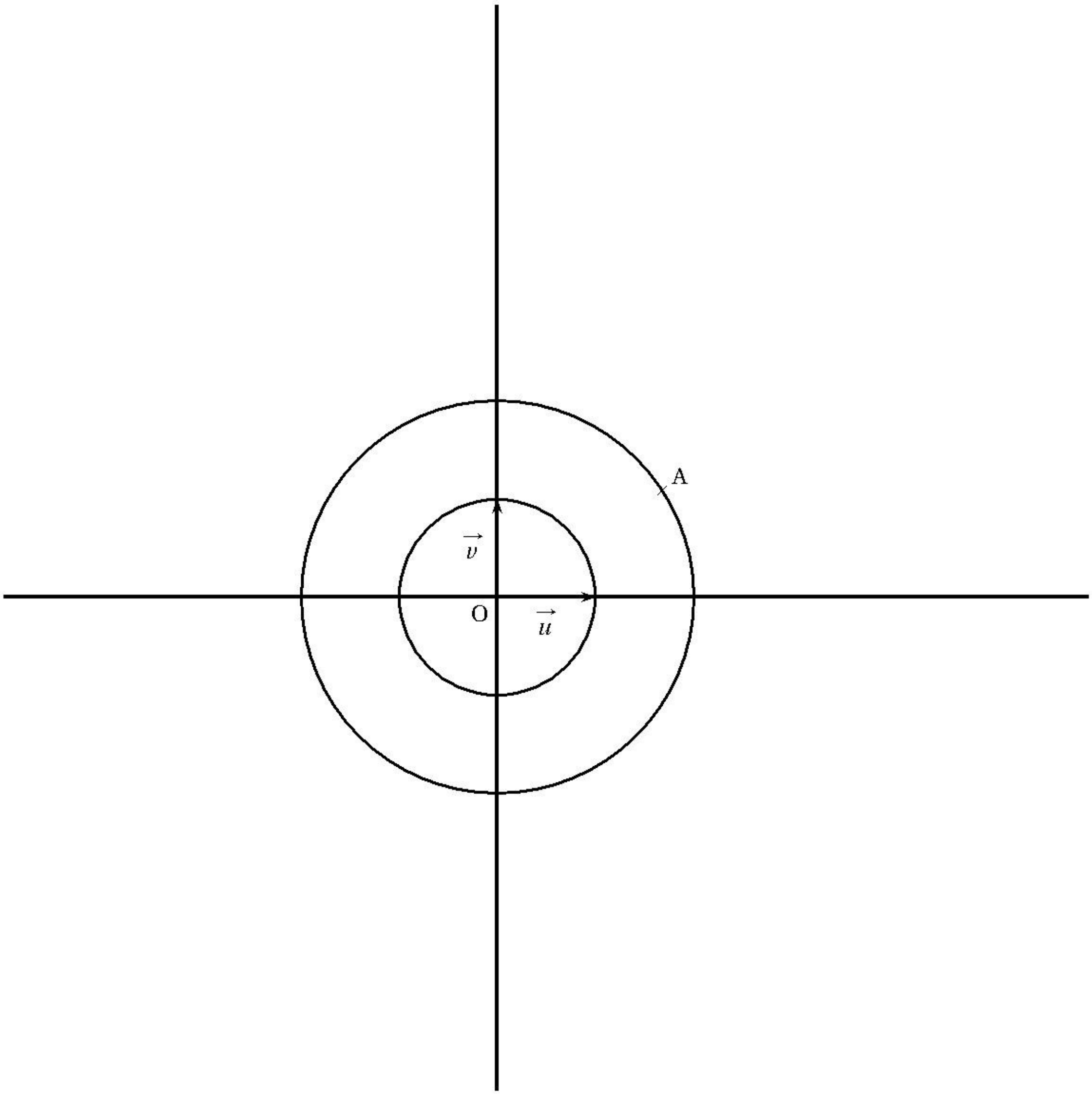
a. Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

ANNEXE 1
Exercice 2
(À rendre avec la copie)



ANNEXE 2
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3} u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3} u_n - 2$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3} v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$ donc $v_n = v_0\, q^n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b. $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

2. *a.* $10\, w_{10} = 11\, w_9 + 1$ soit $10\, w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $w_{10} = 21$.
b. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = 2n + 1$.
Vérification : si $n = 0$, $w_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
Montrons que pour tout n, si $w_n = 2n + 1$ alors $w_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$
$n\, w_n = (n + 1)\, w_{n-1} + 1$ donc $(n + 1)\, w_{n+1} = (n + 2)\, w_n + 1$ soit $(n + 1)\, w_{n+1} = (n + 2)(2n + 1) + 1$
$(n + 1)\, w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3$
or $(2n + 3)(n + 1) = 2n^2 + 5n + 3$ donc $(n + 1)\, w_{n+1} = (2n + 3)(n + 1)$
$n \in \mathbb{N}$ donc $n + 1 \neq 0$ donc $w_{n+1} = 2n + 3$
La propriété est héréditaire donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
La suite (w_n) est donc une suite arithmétique de raison 2 de premier terme $w_0 = 1$.

$w_{2\,009} = 2 \times 2\,009 + 1 = 4\,019$

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats
PARTIE I

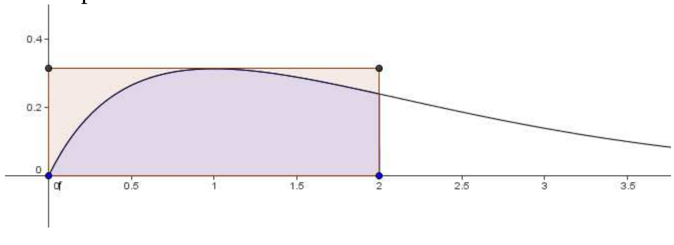
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x\, e^{-x} = 1$
$\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. Soit $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$ alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$
La dérivée de $x \to x\, e^{-x}$ est donc $e^{-x} - x\, e^{-x} = (1 - x)\, e^{-x}$ donc $f'(x) = \frac{e^{-x}(1 - x)}{1 + x\, e^{-x}}$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, pour tout nombre réel positif x, $1 + x\, e^{-x} \geq 1$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

3. $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ d'où le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	$\ln(1 + e^{-1})$	↘	0

PARTIE II
1. Première méthode
a. f est positive sur $[0 ; +\infty[$ et $\lambda > 0$ donc $A(\lambda)$ représente l'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
Exemple : avec $\lambda = 2$, $A(\lambda)$ est représentée par l'aire mauve.



b. f admet sur $[0 ; +\infty[$ un maximum en 1, donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq f(1)$
f est continue sur $[0 ; +\infty[$ et $\lambda > 0$ donc $\int_0^\lambda f(x)\, dx \leq \int_0^\lambda f(1)\, dx$ soit $A(\lambda) \leq f(1) \int_0^\lambda dx$ donc pour tout λ strictement positif, $A(\lambda) \leq \lambda\, f(1)$.

2. Deuxième méthode

a. Soit $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

donc $\int_0^{\lambda} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$\int_0^{\lambda} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\lambda}$

$\int_0^{\lambda} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1.$

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \geq 0$, $x\,\mathrm{e}^{-x} \geq 0$ donc $\ln(1 + x\,\mathrm{e}^{-x}) \leq x\,\mathrm{e}^{-x}$

f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $\lambda > 0$ donc $\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\lambda} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{A}(\lambda) \leq -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.

3. Application numérique

Si $\lambda = 5$, Méthode 1 : $\mathrm{A}(5) \leq 5\,f(1)$ soit $\mathrm{A}(\lambda) \leq 1{,}57$

Méthode 2 : $\mathrm{A}(5) \leq -5\,\mathrm{e}^{-5} - \mathrm{e}^{-5} + 1$ soit $\mathrm{A}(\lambda) \leq 0{,}96$

La méthode 2 donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

I. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$

$(p-1)!\,(n-p)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1) \times 1 \times 2 \times \ldots\,(n-p)$

$p!\,(n-p-1)! = 1 \times 2 \times \ldots \times p \times 1 \times 2 \times \ldots\,(n-p-1)$

Pour réduire au même dénominateur les deux fractions, il suffit de multiplier le premier dénominateur par p et le second par $n-p$

$(p-1)!\,(n-p)! \times p = 1 \times 2 \times \ldots \times (p-1) \times p \times 1 \times 2 \times \ldots\,(n-p) = p! \times (n-p)!$

$p!\,(n-p-1)! \times (n-p) = 1 \times 2 \times \ldots \times p \times 1 \times 2 \times \ldots\,(n-p-1) \times (n-p) = p! \times (n-p)!$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)! \times p}{(p-1)!(n-p)! \times p} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p-1)! \times (n-p)}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \Leftrightarrow \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)! \times [p + (n-p)]}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ donc } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

II. 1. *a.* On a équiprobabilité des événements élémentaires donc $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Le nombre de cas possibles est $\binom{10}{2} = 45$; le nombre de cas favorables est $\binom{7}{2} = 21$ donc $p(\mathrm{A}) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

b. 4 jetons blancs portent un numéro impair (1 ; 3 ; 5 ; 7) et 2 jetons noirs portent un numéro impair (1 ; 3) donc 6 jetons portent un numéro impair. Le nombre de cas favorables est $\binom{6}{2} = 15$ donc $p(\mathrm{B}) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

c. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est l'événement : « « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ».

Le nombre de cas favorables est $\binom{4}{2} = 6$ donc $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

$p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} \neq \frac{2}{15}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. b. $p(\mathrm{X} = 0) = \dfrac{\binom{3}{2}}{45} = \dfrac{1}{15}$ et $p(\mathrm{X} = 1) = \dfrac{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1}}{45} = \dfrac{7}{15}$

x	0	1	2	Total
$p(\mathrm{X} = x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	1
$x\,p(\mathrm{X} = x)$	0	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$

donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{7}{5}$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* Soit z_1 l'affixe de M_1, $z_1 = \dfrac{1}{z}$ donc $z\,z_1 = 1$

$|z\,z_1| = 1$ et $\arg(z\,z_1) = 0$ à 2π près soit $|z|\,|z_1| = 1$ et $\arg(z) + \arg(z_1) = 0$ à 2π près.

donc $OM \times OM_1 = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = 0$ à 2π près.

soit $OM \times OM_1 = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ à 2π près.

b. Deux constructions sont possibles :

Construction 1

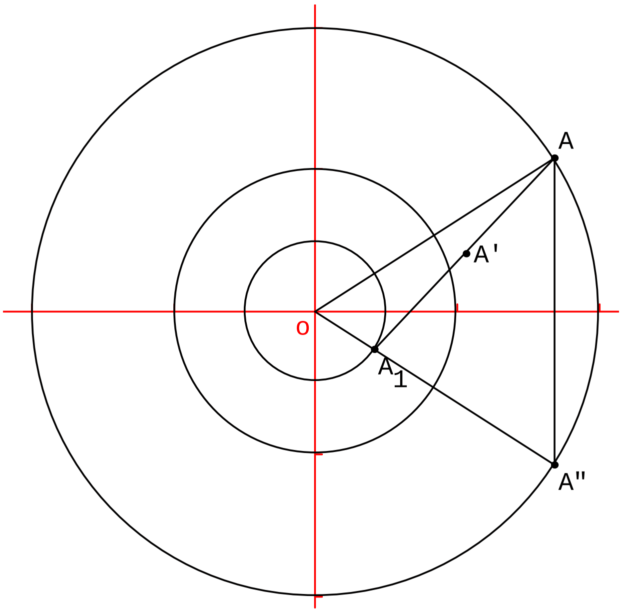
Construire le point A" symétrique de A par rapport à l'axe des réels, alors OA = OA" = 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA''}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ à 2π près.

puis construire le cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{2}$

Le segment [OA"] coupe ce cercle en A_1 tel que

$OA \times OA_1 = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ à 2π près.

A' est le milieu de $[AA_1]$.



Construction 2

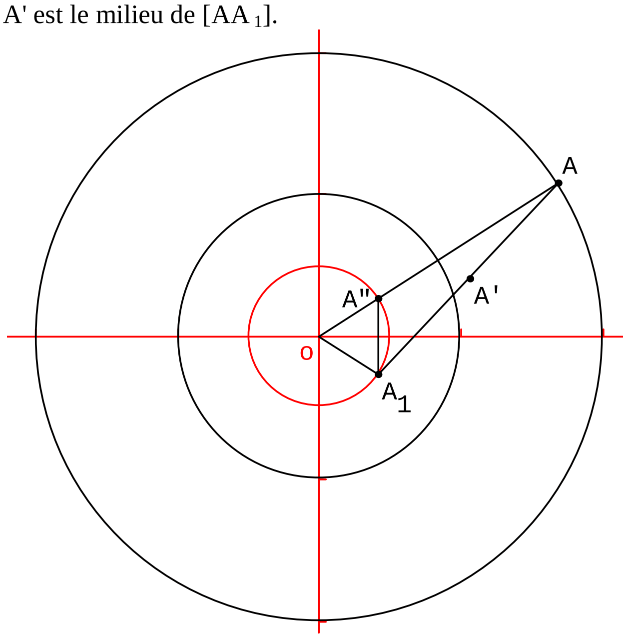
Construire le cercle de centre O de rayon 0,5

Construire le point A" intersection de ce cercle et du rayon OA alors OA" = 0,5 et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA''}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ à 2π près.

puis construire le symétrique de A" par rapport à l'axe des réels, alors $OA_1 = OA'' = 0{,}5$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OA''})$ à 2π près

$OA \times OA_1 = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ à 2π près.

A' est le milieu de $[AA_1]$.

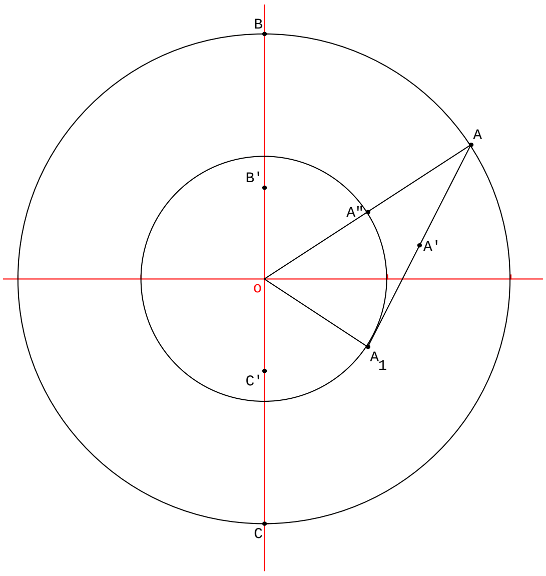


2. *a.* M_1 a pour affixe z_1 et M pour affixe z donc le milieu M' de $[MM_1]$ a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}(z + z_1)$ or $z_1 = \dfrac{1}{z}$

donc $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b. B' a pour affixe $b' = \dfrac{1}{2}\left(2\,\mathrm{i} + \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2\,\mathrm{i} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$; C' a pour affixe $c' = \dfrac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{i} + \dfrac{1}{-2\,\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{i} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$

c.



3. $M = M' \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z = z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{z}$

$\Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z = 1$

4. Si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors il existe un réel θ tel que son affixe soit $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ ou encore $e^{\mathrm{i}\theta}$ donc $\dfrac{1}{z} = e^{-\mathrm{i}\theta}$ donc $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}) = \cos\theta$ donc M' est un point de l'axe des réels

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ donc M′ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives − 1 et 1.

<u>Autre démonstration possible :</u> M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon 1 donc M_1 est tel que $OM_1 = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ à 2π près donc M_1 est le point du cercle $\mathcal{C}$ symétrique de M par rapport à l'axe des réels donc le milieu M' de $[MM_1]$ est un point de l'axe des réels de même abscisse que M situé à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ donc M′ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives − 1 et 1.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $8 \times 1 - 5 \times 1 = 5$ donc $8\,x - 5\,y = 3$ admet pour solution particulière $x = 1$ et $y = 1$
Par différence membre à membre : $8\,(x - 1) - 5\,(y - 1) = 0$ soit $8\,(x - 1) = 5\,(y - 1)$
8 divise $5\,(y - 1)$ et 8 est premier avec 5 donc 8 divise $y - 1$, il existe un entier relatif k tel que $y - 1 = 8\,k$
En remplaçant $y - 1$ par $8\,k$ dans $8\,(x - 1) = 5\,(y - 1)$ on obtient que $8\,(x - 1) = 5 \times 8\,k$ donc $x - 1 = 5\,k$
donc $x = 5\,k + 1$ et $y = 8\,k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Vérification : $8\,(5\,k + 1) - 5\,(8\,k + 1) = 3$
Les solutions de l'équation (E) sont les entiers vérifiant $x = 5\,k + 1$ et $y = 8\,k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b. S'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8\,p + 1$ et $m = 5\,q + 4$ alors $8\,p + 1 = 5\,q + 4$ soit $8\,p - 5\,q = 3$ donc le couple (p, q) est solution de l'équation (E), donc il existe un entier relatif k tel que $p = 5\,k + 1$ et $q = 8\,k + 1$ donc en remplaçant $m = 40\,k + 5 + 4 = 40\,k + 9$ donc $m \equiv 9$ (modulo 40).

c. $m = 40\,k + 9$ et $m \geq 2\,000$ donc $40\,k \geq 2\,000 - 9$, soit $k \geq 50$ donc $m = 2\,009$

2. *a.* $2^3 = 8 = 7 + 1$ donc $2^3 \equiv 1$ (modulo 7) donc pour tout entier naturel k, $2^{3\,k} \equiv 1$ (modulo 7)
$2\,009 = 3 \times 669 + 2$ donc $2^{2\,009} = 2^{3 \times 669} \times 2^2$
or $2^{3\,k} \equiv 1$ (modulo 7) donc $2^{3 \times 669} \equiv 1$ (modulo 7) donc $2^{2\,009} \equiv 2^2$ (modulo 7)
Le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 est 4

3. *a.* $10 = 7 + 3$ donc $10 \equiv 3$ (modulo 7) donc $10^3 \equiv 3^3$ (modulo 7)
$3^3 = 27 = 4 \times 7 - 1$ donc $3^3 \equiv -1$ (modulo 7) donc $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b. $\mathrm{N} = a \times 10^3 + b$ donc $\mathrm{N} \equiv -a + b$ (modulo 7)
N est divisible par 7 si et seulement si $\mathrm{N} \equiv 0$ (modulo 7) soit si et seulement si $a \equiv b$ (modulo 7)
$1 \leq a \leq 9$ donc $\mathrm{N} \in \{1\,001 ; 2\,002 ; 3\,003 ; 4\,004 ; 5\,005 ; 6\,006 ; 7\,007 ; 8\,008 ; 9\,009\}$