SPECIALITE

Comment traiter un problème de divisibilité ?

Méthode :

> Pour les problèmes de divisibilité dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$, on se ramène à la définition de la divisibilité : b divise a signifie qu'il existe un entier k ($k \in \mathbb{N}$ ou $k \in \mathbb{Z}$ selon le problème) tel que $a = kb$. On n'oublie pas de bien s'assurer que k est un nombre entier

Ex 1 : Montrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$.

En déduire que pour tout entier naturel n, 9 ne divise pas $10^n + 1$.

Ex 2 : Montrer que, pour tout entier naturel n, 10 divise $5n^2 + 15n$

Ex 3 (**) : Montrer que pour tout entier naturel n, 6 divise $n^3 - n$.

Ex 4 : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Ex 5 : Déterminer les entiers relatifs n tels que $\frac{5n+7}{n+2}$ soit un entier.

Ex 6 : Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tels que $4x^2 = y^2 + 15$

QCM (vrai ou faux) :

Soient a,b et c trois entiers relatifs.

Dire pour chacune des propositions suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Si a divise b, alors b divise a.
2. Si a divise $a + b$ alors a divise b.
3. Si a divise b^2 alors a divise b
4. Si a divise b alors a divise b^2
5. Si a divise b et a divise c alors a divise $b\,c$
6. Si a divise $b\,c$ alors a divise b ou a divise c.
7. Si a divise b et a divise c alors a divise $b\,c$

(**)

On se propose de démontrer le résultat par une autre méthode :

☞ On admet que si un nombre N est divisible par 2 et par 3 alors il est divisible par 6.

1. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
2. Justifier que l'un des termes du produit est nécessairement divisible par 3
3. Montrer que si ce terme n'est pas divisible par 6, alors l'un des deux autres est divisible par 2
4. Conclure en raisonnant par disjonction des cas.