On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :
• l'effectif de la population est globalement constant,
• chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.
Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013 + n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et Y = A X.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\,X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P Q et Q P. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
b. Vérifier que la matrice $P^{-1} A P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P D^n P^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)\, v_0 + \frac{1}{6}(1 - 5 \times 0,94^n)\, c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

CORRECTION

1. $v_{n+1} = 0,95\, v_n + 0,01\, c_n$ et $c_{n+1} = 0,05\, v_n + 0,99\, c_n$

2. $Y = A\,X = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95\,a + 0,01\,b \\ 0,05\,a + 0,99\,b \end{pmatrix}$ donc $c = 0,95\,a + 0,01\,b$ et $d = 0,05\,a + 0,99\,b$

3. *a.* $P\,Q = Q\,P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\,I_2$ donc $P^{-1} = \frac{1}{6} Q$.

b. $A\,P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} A\,P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,94 \\ 5 & 0,94 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}$

$P^{-1} A\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix} = D$

c. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P D^n P^{-1}$.
<u>Initialisation :</u> $n = 1$, $P^{-1} A P = D$ donc $P P^{-1} A P P^{-1} = P D P^{-1}$ donc $A = P D P^{-1}$
La propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, si $A^n = P D^n P^{-1}$ alors $A^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$.
$A^{n+1} = A \times A^n = P D P^{-1} P D^n P^{-1} = P D \times D^n P^{-1}$ donc $A^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P D^n P^{-1}$.

4. $-1 < 0,94 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{6} v_0 + \frac{1}{6} c_0 = \frac{1}{6}(v_0 + c_0)$

Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants donc $v_0 + c_0 = 250\,000$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{6} \times 250\,000$

La répartition de la population de cette région à long terme sera donc de $\frac{1}{6} \times 250\,000$ dans les villes et $\frac{5}{6} \times 250\,000$ dans les campagnes soit 1 habitant dans les villes pour 5 dans les campagnes.