Polynésie juin 2012.
EXERCICE 1 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points B (100 ; 100) et C $\left(50 ; \dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ, est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{ax+b}$
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1\. *a*. Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution du système : $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{0{,}01x - 1}$.

2\. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3\. *a*. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0{,}01\,x\,e^{0{,}01x}$

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

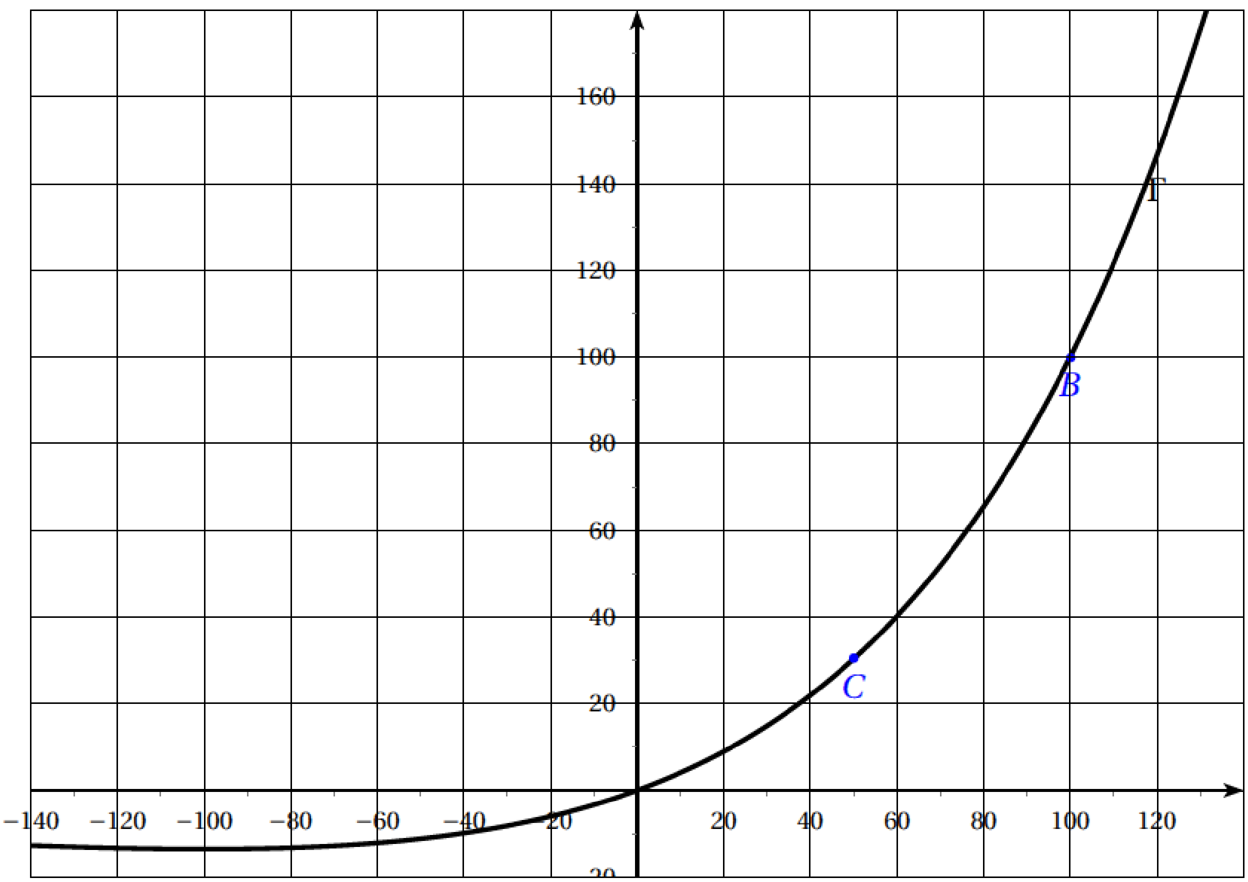
4\. Étudier les variations de la fonction f .On donnera le tableau de variations complet.

5\. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

6\. *a*. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,dt$.

b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ.
Calculer A.

Annexe de l'exercice 1



EXERCICE 2 5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 + 2\,i, \; b = -3 - 6\,i \text{ et } c = 1.$$

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. *a*. Donner l'écriture complexe de la rotation *r* de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. En déduire l'affixe du point A' image de A par *r* .

c. Vérifier que l'affixe *s* du point S milieu de [AA'] est $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\,i$.

d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, Q le milieu de [CC'], B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB'].

On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,i$ et $p = 2 - 5\,i$.

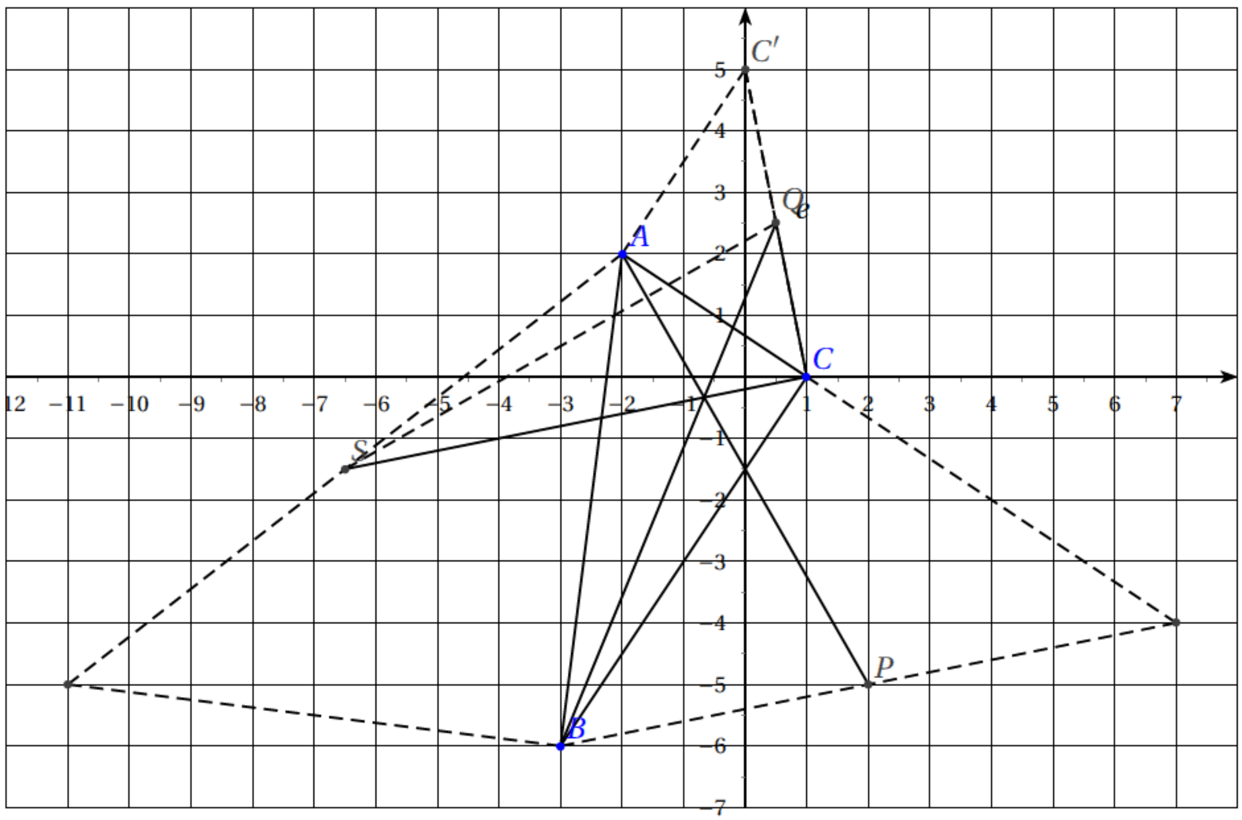
a. Démontrer que $\dfrac{s-q}{p-a} = -\,i$.

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

Annexe de l'exercice 2



EXERCICE 3 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

<u>Entrée</u>
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
<u>Traitement</u>
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N – 1
Affecter à U la valeur 3 U – 2 k + 3
Fin pour
<u>Sortie</u>
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. *a*. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b. Justifier que $n_0 \leq 3p$

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

EXERCICE 4 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004\,x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

EXERCICE 4 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1$ [p].

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors $x \equiv a$ [133].

2. *a*. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1$ [7] puis que $a^{108} \equiv 1$ [7].

En déduire que $(a^{25})^g \equiv a$ [7].

b. On suppose que a est un multiple de 7.

Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [7].

c. On admet que pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ [19].

Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r$ [133] avec $0 \leq r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \leq r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a$ [133].
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.

Décoder ce message.

CORRECTION

Polynésie juin 2012.
EXERCICE 1 5 points

1\. *a*. Les points B et C appartiennent à la courbe Γ donc $f(100) = 100$ et $f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}}$.

$f(100) = 100$ et $f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 100\,e^{100a+b} = 100$ et $50\,e^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1$ et $e^{50a+b} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 100\,a + b = 0$ et $50\,a + b = -\dfrac{1}{2}$

Le couple $(a\,;\,b)$ est solution du système : $\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50\,a = \dfrac{1}{2} \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{100} \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}01 \\ 0{,}5 + b = -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0{,}01$ et $b = -1$.

Pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{0,01x-1}$.

2\. $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}01\,x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,01x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3\. *a*. $1 = 100 \times 0{,}01$ et $e^{0,01x-1} = e^{0,01x} \times e^{-1}$ donc $x\,e^{0,01x-1} = 100 \times 0{,}01 \times x\,e^{0,01x} \times e^{-1} = (10\,e^{-1}) \times 0{,}01\,x\,e^{0,01x}$.

pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0{,}01\,x\,e^{0,01x}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}01\,x = -\infty$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u\,e^{u} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}01\,x\,e^{0,01x}$.= 0 donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4\. Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{0,01x-1} & v'(x) = 0{,}01\,e^{0,01x-1} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{0,01x-1} + x \times 0{,}01\,e^{0,01x-1} = (1 + 0{,}01\,x)\,e^{0,01x-1}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 + 0{,}01\,x$

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-100	$\nearrow$	$+\infty$

5\. $f(x) - x = x\,(e^{0,01x-1} - 1)$, $e^{0,01x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} > 1 \Leftrightarrow 0{,}01\,x - 1 > 0 \Leftrightarrow x\ 100$

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{0,01x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\,(e^{0,01x-1} - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;\,0[\ \cup\ ]100\,;\,+\infty[$, $f(x) - x > 0$ donc la courbe Γ est au dessus de C sur ces intervalles.
Sur $]0\,;\,100[$, $f(x) - x < 0$ donc la courbe Γ est en dessous de C sur $]0\,;\,100[$.
La courbe et la droite se coupent aux points d'abscisses 0 et 100.

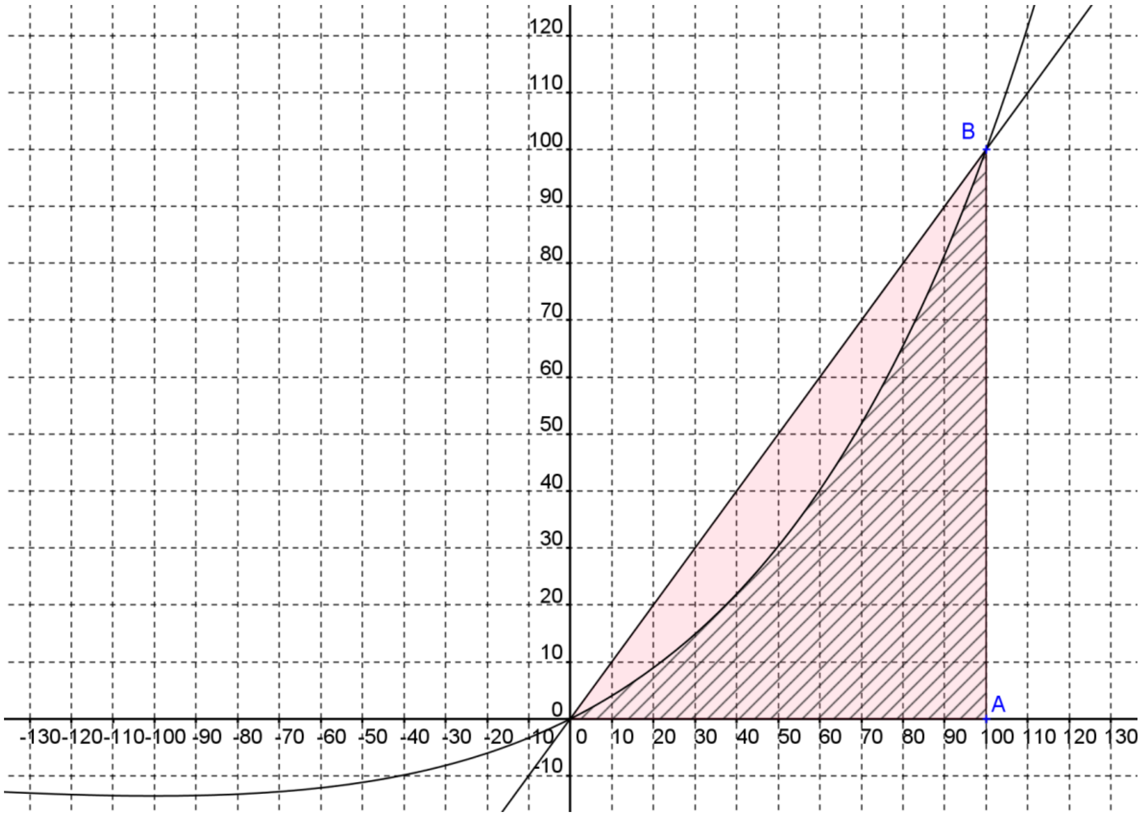
6\. *a*. Soit $\begin{cases} u'(t) = e^{0,01t-1} & u'(t) = \dfrac{1}{0{,}01}\,e^{0,01t-1} = 100\,e^{0,01t-1} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$ donc $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,dt = \left[100\,t\,e^{0,01t-1}\right]_0^{100} - \int_0^{100} 100\,e^{0,01t-1}\,dt$

$\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,dt = 10\,000 - \left[10\,000\,e^{0,01t-1}\right]_0^{100}$

$\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,dt = 10\,000 - (10\,000 - 10\,000\,e^{-1}) = 10\,000\,e^{-1}$ unités d'aire *b*. L'aire du triangle OAB (aire colorée en rose) est égale à $\frac{1}{2} \times 100 \times 100 = 5\,000$ unités d'aire.

$\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire du domaine hachuré.

Sur [0 ; 100], la courbe Γ est en dessous de C sur] 0 ; 100 [donc $A = 5\,000 - \int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = 5\,000\,(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1})$



EXERCICE 2 5 points

1. $AB^2 = |b - a|^2 = |-1 - 8\,i|^2 = 65$

$AC^2 = |c - a|^2 = |3 - 2\,i|^2 = 13$

$BC^2 = |b - c|^2 = |-4 - 6\,i|^2 = 52$ donc $BC^2 + AC^2 = 13 + 52 = 65 = AB^2$ donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. *a*. L'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b)$ soit $z' = i\,z + b - i\,b$

$z' = i\,z - 3 - 6\,i + 3\,i - 6$ soit $z' = i\,z - 9 - 3\,i$

b. L'affixe du point A' image de A par r est $a' = i\,(-2 + 2\,i) - 9 - 3\,i$ donc $a' = -11 - 5\,i$.

c. L'affixe s du point S milieu de [AA'] est $s = \frac{1}{2}(a + a') = \frac{1}{2}(-2 + 2\,i - 11 - 5\,i)$ donc $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\,i$.

d. Le triangle ABC est rectangle en C donc le milieu Ω de [AB] est centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Ω a pour affixe $\frac{1}{2}(a + b) = -\frac{5}{2} - 2\,i$

Le rayon du cercle est $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{65}$.

$\Omega S = \left| -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\,i - \left(-\frac{5}{2} - 2\,i\right)\right|^2 = \left| -4 + \frac{1}{2}\,i\right|^2 = 16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}$ donc $\Omega S = \frac{1}{2}\sqrt{65}$, le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. *a*. $s - q = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\,i - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,i\right) = -7 - 4\,i$

$p - a = 2 - 5\,i - (-2 + 2\,i) = 4 - 7\,i$ donc $-i\,(p - a) = -7 - 4\,i = s - q$ donc $\frac{s - q}{p - a} = -i$.

b. $\frac{s - q}{p - a} = -i \Leftrightarrow \arg\left(\frac{s - q}{p - a}\right) = \arg(-i)\ [2\pi]$ et $\left|\frac{s - q}{p - a}\right| = |-i| \Leftrightarrow (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{QS}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\frac{SQ}{AP} = 1$ donc les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x + 2\,;\, y - 2)$ et $\overrightarrow{AP}\,(4\,;\,-7)$

La droite (AP) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ soient colinéaires donc : $(x + 2) \times (-7) - (y - 2) \times 4 = 0$

donc $-7\,x - 4\,y - 6 = 0$ donc $7\,x + 4\,y = -6$

$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x + 3\,;\, y + 6)$ et $\overrightarrow{BQ}\,(3{,}5\,;\,8{,}5)$

La droite (BQ) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BQ}$ soient colinéaires donc : $(x + 3) \times 8{,}5 - (y + 6) \times 3{,}5 = 0$

donc $8{,}5\,x - 3{,}5\,y + 25{,}5 - 21 = 0$ soit $8{,}5\,x - 3{,}5\,y + 4{,}5 = 0$ donc en multipliant par 2 : $-17\,x + 7\,y = 9$

$\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x - 1\,;\, y)$ et $\overrightarrow{CS}\,(-7{,}5\,;\,-1{,}5)$

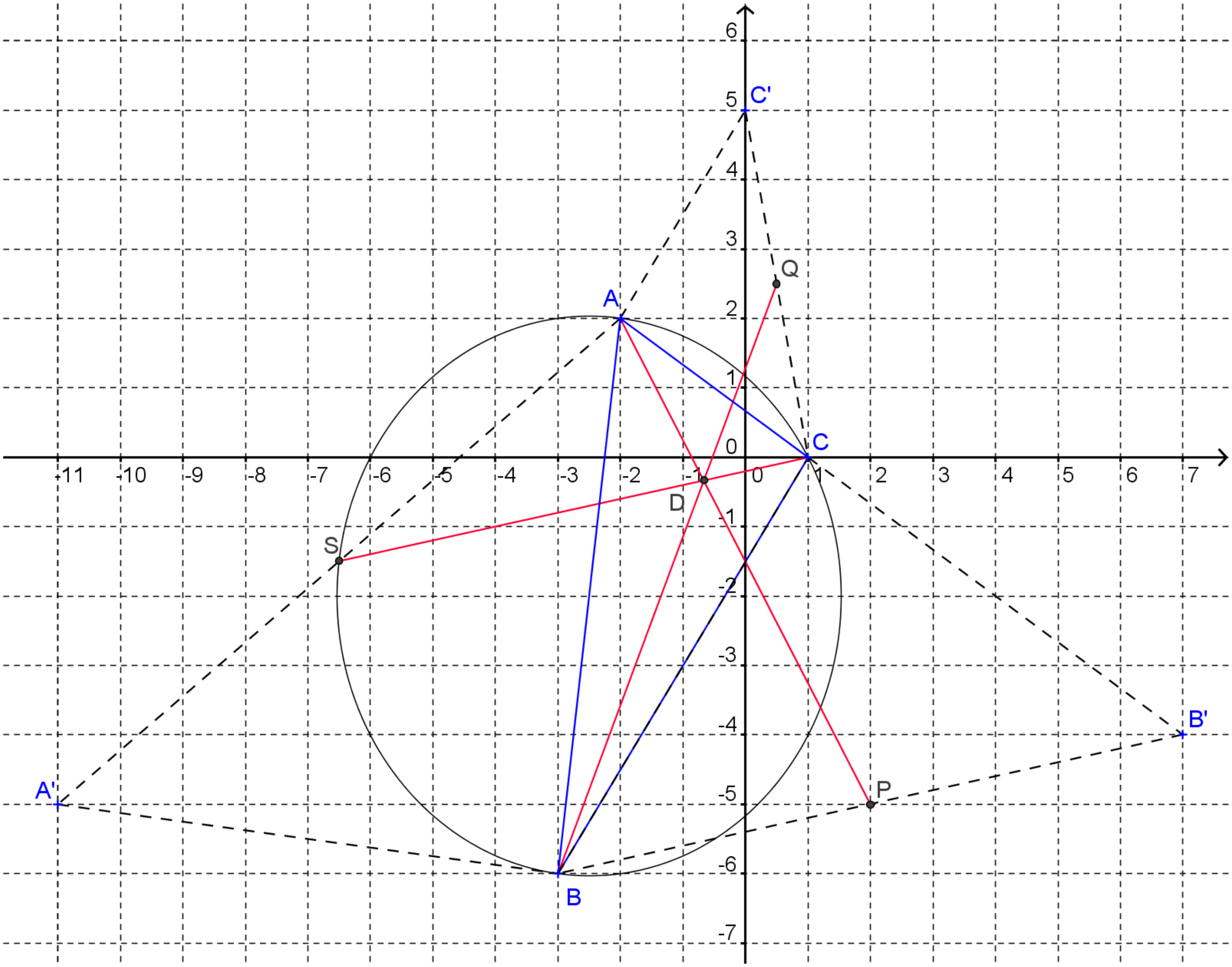
La droite (CS) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CS}$ soient colinéaires donc : $(x - 1) \times (-1{,}5) - y \times (-7{,}5) = 0$

donc $-1{,}5\,x + 7{,}5\,y + 1{,}5 = 0$ donc en multipliant par 2 : $-3\,x + 15\,y = -3$

Cherchons le point d'intersection de (BQ) et (CS), ses coordonnées sont solutions de $\begin{cases} 7\,x + 4\,y = -6 \\ -3\,x + 15\,y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21\,x + 12\,y = -18 \\ -21\,x + 105\,y = -21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\,x + 4\,y = -6 \\ 117\,y = -39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\,x + 4\,y = -6 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3} \times 7 + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -6$ donc le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ est le point d'intersection des droites (AP), (BQ) et (CS).



C'
Q
A
C
D
S
B'
A'
P
B

EXERCICE 3 5 points

Partie A

		Etape 1	Etape 2	Etape 3
k		0	1	2
U	0	$3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$	$3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$	$3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie lorsque N = 3 est 29

Partie B

1. $u_1 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$

2. *a*. Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geq 0$

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $u_n \geq n$ alors $u_{n+1} \geq n + 1$.

$u_{n+1} = 3\,u_n - 2\,n + 3$, or $u_n \geq n$ donc $3\,u_n \geq 3\,n$ donc $u_{n+1} \geq 3\,n - 2\,n + 3$ soit $u_{n+1} \geq n + 1$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$ donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_{n+1} - u_n = 2\,u_n - 2\,n + 3 = 2\,(u_n - n) + 3$

Pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$, donc $2\,(u_n - n) + 3 \geq 3$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = u_{n+1} - n$

$v_{n+1} = 3\,u_n - 3\,n + 3 = 3\,v_n$.

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 3^n$.

b. pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 3^n$ or $v_n = u_n - n + 1$ donc $u_n = v_n + n - 1$ soit, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$

5. *a*. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc pour tout entier naturel non nul p, il existe un entier naturel n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq 10^p$.

b. si $n \geq 3\,p$ alors, pour tout entier p non nul, $u_n \geq 3^{3p} + 3\,p - 1 \geq 3^{3p}$.

$u_n \geq 27^p$ or $27 \geq 10$ donc $27^p \geq 10^p$ donc si $n \geq 3\,p$ alors $u_n \geq 10^p$

n_0 est le plus petit entier tel que $u_n \geq 10^p$ donc $3\,p \geq n_0$.

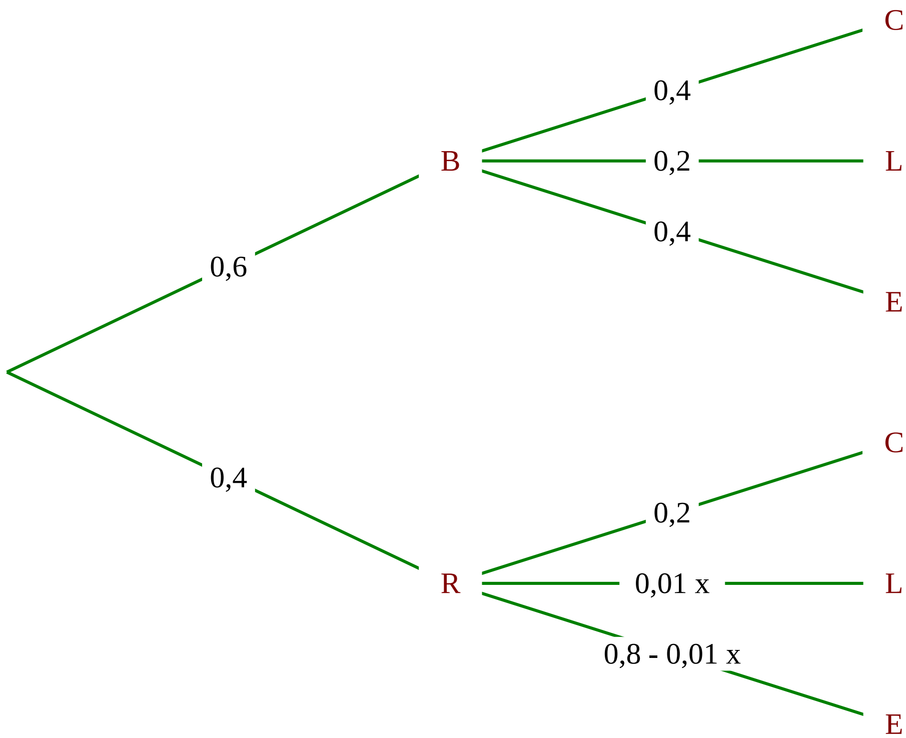
c. si $p = 3$, $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ or la suite (u_n) est croissante donc si $n \geq 7$ alors $u_n \geq 10^3$ donc $n_0 = 7$.

d.

<u>Entrée</u>
  Saisir le nombre entier naturel non nul p.
<u>Traitement</u>
  Affecter à n la valeur 0
  Tant que $3^{3p} + 3\,p - 1 < 10^p$
    Affecter à n la valeur $n + 1$
  Fin Tant Que
<u>Sortie</u>
Afficher n

EXERCICE 4 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : expérience 1



1. La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est $p(\mathrm{L}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L}) + p(\mathrm{R} \cap \mathrm{L}) = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}01\,x$
$p = 0{,}12 + 0{,}004\,x$.

2. la probabilité de tirer un cube marqué d'une étoile est $p\,(\mathrm{B} \cap \mathrm{E}) + p(\mathrm{R} \cap \mathrm{E}) = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times (\,0{,}8 - 0{,}01\,x)$
soit $0{,}56 - 0{,}004\,x$
la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile quand
$0{,}12 + 0{,}004\,x = 0{,}56 - 0{,}004\,x$ donc $0{,}008\,x = 0{,}44$ soit $x = 55$.

3. La probabilité de tirer un marqué d'un losange est $p(\mathrm{L}) = 0{,}12 + 0{,}004\,x$
Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants si et seulement si :

$$p\,(\mathrm{B} \cap \mathrm{L}) = p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{L})$$

soit $0{,}12 = 0{,}6 \times (0{,}12 + 0{,}004\,x) \Leftrightarrow 12 = 7{,}2 + 0{,}24\,x \Leftrightarrow 4{,}8 = 0{,}24\,x \Leftrightarrow x = 20$

4. $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L}) = 0{,}12$ et $p(\mathrm{L}) = 0{,}12 + 0{,}004 \times 50 = 0{,}32$

La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est $p_{\mathrm{L}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p\,(\mathrm{B} \cap \mathrm{L})}{p\,\mathrm{L})} = \dfrac{0{,}12}{0{,}32} = \dfrac{3}{8}$

Partie B : expérience 2

1. L'événement « tirer au moins un cube rouge » est événement contraire de « ne pas tirer un cube rouge » soit de l'événement « tirer trois cubes bleus » donc $p = 1 - 0{,}6^3$.

2. On a tiré soit 3 cubes rouges ($p = 0{,}4^3$) soit 3 cubes bleus ($q = 0{,}6^3$) donc la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur est : $p = 0{,}6^3 + 0{,}4^3 = 0{,}28$

3. La probabilité de tirer un cube marqué d'un cercle est $0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}32$.
Il y a 32 cubes marqués d'un cercle et $100 - 32 = 68$ cubes non marqués d'un cercle donc :

La probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle est $\dfrac{\dbinom{1}{32} \times \dbinom{2}{68}}{\dbinom{3}{100}} = 0{,}451$.

EXERCICE 4 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $25 \times 13 = 325$ et $108 \times 3 = 324$ donc $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1$ le couple (13 ; 3) est solution de l'équation (E).

2. $\begin{cases} 25x - 108y = 1 \\ 25 \times 13 - 108 \times 3 = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $25(x - 13) - 108(y - 3) = 0$

$25(x - 13) = 108(y - 3)$, $x - 13$ est un entier relatif donc 25 divise $108(y - 3)$ or 25 et 108 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 25 divise $y - 3$ donc $y - 3 = 25k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

En remplaçant dans $25(x - 13) = 108(y - 3)$ alors $x - 13 = 108k$ donc $x = 108k + 13$ et $y = 25k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $\{(108k + 13 ; 25k + 3), k \in \mathbb{Z}.\}$.

Partie B

1. si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors 7 divise $x - a$ et 19 divise $x - a$ or 7 et 19 sont premiers entre eux donc 7×19 divise $x - a$ (théorème de Gauss) donc $x \equiv a$ [133].

2. *a*. 7 est un nombre premier et a est un entier non divisible par 7, alors (théorème de Fermat) $a^6 \equiv 1$ [7].
$108 = 6 \times 18$ donc si $a^6 \equiv 1$ [7], alors $(a^6)^{18} \equiv 1^{18}$ [7] soit $a^{108} \equiv 1$ [7].
$a^{25g - 108c} = a^1$ donc $a^{25g} = a \times a^{108c}$ donc $(a^{25})^g \equiv a \times (a^{108})^c$ [7] or $a^{108} \equiv 1$ [7] donc $(a^{108})^c \equiv 1$ [7] donc $(a^{25})^g \equiv a$ [7]

b. Si a est un multiple de 7 alors $a \equiv 0$ [7] donc $(a^{25})^g \equiv 0$ [7] donc $(a^{25})^g \equiv a$ [7].
c. Pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ [19] soit $x = (a^{25})^g$.
D'après la question B. 1. si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors $x \equiv a$ [133]. donc $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

1. $a^{25} \equiv r$ [133] et $r^{13} \equiv r_1$ [133] donc $(a^{25})^{13} \equiv r_1$ [133]
or $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1$ donc, d'après la partie B, si $g = 13$ alors, pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ [133] donc $r_1 \equiv a$ [133].

2.

r	128	59
$r_1 \equiv r^{13}$ [133]	2	3
Décodage : $a \equiv r_1$ [133]	2	3

$r = 128$ donc $r_1 \equiv 128^{13}$ [133]
$128 \equiv -5$ [133] donc $128^2 \equiv 25$ [133] donc $128^3 \equiv 128 \times 25$ [133] soit $128^3 \equiv 8$ [133]
$128^6 \equiv 8^2$ [133] donc $128^{12} \equiv 64^2$ [133]
$128^{12} \equiv 106$ [133]
$128^{13} \equiv 106 \times (-5)$ [133] or $106 \times (-5) = -530 = -133 \times 4 + 2$
$128^{13} \equiv 2$ [133] or $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \le r_1 < 133$ donc $r_1 = 2$ or $r_1 \equiv a$ [133] donc 128 est décodé par 2

$59 = 59$ donc $59^2 = 3481 = 133 \times 26 + 23$ donc $59^2 \equiv 23$ [133]
$59^4 \equiv 23^2$ [133] or $23^2 = 529 = 133 \times 4 - 3$ donc $59^4 \equiv -3$ [133]
$59^8 \equiv (-3)^2$ [133] donc $59^8 \equiv 9$ [133]
$59^{12} = 59^8 \times 59^4$ donc $59^{12} \equiv 9 \times (-3)$ [133] donc $59^{12} \equiv -27$ [133]
$59^{13} = 59^{12} \times 59$ donc $59^{13} \equiv -27 \times 59$ [133] or $-27 \times 59 = -1593$
$-1593 = 133 \times (-12) + 3$ or $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \le r_1 < 133$ donc $r_1 = 3$ or $r_1 \equiv a$ [133] donc 59 est décodé par 3.