Partie A

1. Restitution organisée de connaissances

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- $e^0 = 1$.
- Pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[\, A ; +\infty [$, où A est un réel positif.

Si pour tout x de $[\, A ; +\infty [$: $v(x) \le w(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = +\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[\, 0 ; +\infty [$ par $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[\, 0 ; +\infty [$, $\varphi(x) \ge 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[\, 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[\, 0 ; +\infty [$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \ge 0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{2} y = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{2} y = 0$.

a. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t) = a\, t\, e^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).

b. Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation (E').

c. Résoudre l'équation (E').

d. En déduire les solutions de l'équation (E).

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$
	Incrémenter la variable n de 1
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n

où f est la fonction étudiée dans la partie A.

a. A l'aide de la question 2. *a.* de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

CORRECTION

Partie A

1. Restitution organisée de connaissances

a. φ est une fonction dérivable sur $[\, 0 ; +\infty [$ et $\varphi'(x) = e^x - x$

Pour tout réel x, on a $e^x > x$ donc $\varphi'(x) > 0$

donc φ est strictement croissante sur $[\, 0 ; +\infty [$, donc pour tout x de $[\, 0 ; +\infty [$, $\varphi(x) \ge \varphi(0)$ soit $\varphi(x) \ge 1$.

b. Pour tout x de $[\, 0 ; +\infty [$, $\varphi(x) \ge 1$ donc $e^x \ge \dfrac{x^2}{2}$ donc comme $x \ge 0$, $\dfrac{e^x}{x} \ge x$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[\, 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Soit $X = \dfrac{1}{2} x$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ donc $\dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x} = X\, e^{-X}$,

or $\lim\limits_{X \to +\infty} X\, e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} x\, e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. Soit $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x & u'(x) = \dfrac{1}{2} \\ v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} & v'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(2 - x)$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $2 - x$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

1. *a.* Soit $\begin{cases} u(t) = at & u'(x) = a \\ v(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} & v'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \end{cases}$ donc $u'(t) = a\dfrac{1}{2}(2 - t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

u est solution de l'équation (E) si et seulement si $u' + \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ soit pour tout t de $[\,0\,;+\infty\,[$:

$a\dfrac{1}{2}(2 - t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2}at\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ soit $a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ donc $a = \dfrac{1}{2}$.

pour tout t de $[\,0\,;+\infty\,[$: $u(t) = \dfrac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

b. $h = v - u$ est solution de l'équation (E') $\Leftrightarrow h' + \dfrac{1}{2}h = 0$

$\Leftrightarrow (v - u)' + \dfrac{1}{2}(v - u) = 0 \Leftrightarrow v' + \dfrac{1}{2}v = u' + \dfrac{1}{2}u$ or $u' + \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

$\Leftrightarrow v' + \dfrac{1}{2}v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \Leftrightarrow v$ solution de (E).

c. L'équation (E') est équivalente à $y' = -\dfrac{1}{2}y$ donc les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $y(t) = \mathrm{C}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

d. v est solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow v - u = \mathrm{C}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

$\Leftrightarrow$ pour tout t de $[\,0\,;+\infty\,[$: $v(t) = \mathrm{C}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + u(t)$

$\Leftrightarrow$ pour tout t de $[\,0\,;+\infty\,[$: $v(t) = \left(\mathrm{C} + \dfrac{1}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

3. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x)$ est aussi petite que voulue (ici 0,1) à condition de prendre n assez grand donc il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

b.

n	$f(n)$	Test	Algorithme
3	0,3347	$f(n) > 0{,}1$	continue
4	0,2707	$f(n) > 0{,}1$	continue
5	0,2052	$f(n) > 0{,}1$	continue
6	0,1494	$f(n) > 0{,}1$	continue
7	0,1057	$f(n) > 0{,}1$	continue
8	0,0733	$f(n) > 0{,}1$	continue
9	0,0500	$f(n) > 0{,}1$	continue
10	0,0337	$f(n) > 0{,}1$	continue
11	0,0225	$f(n) > 0{,}1$	continue
12	0,0149	$f(n) > 0{,}1$	continue
13	0,0098	$f(n) \le 0{,}1$	s'arrête

La fonction f est décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc si $n \ge 8$, $f(n) \le 0{,}01$ donc $n_0 = 13$