Sommaire

2012 ... **2**

AMERIQUE DU NORD JUIN 2012 ... 2
NOUVELLE CALEDONIE NOVEMBRE 2012 ... 3
ANTILLES–GUYANE SEPTEMBRE 2012 ... 4

2011 ... **6**

AMERIQUE DU SUD NOVEMBRE 2011 ... 6
ANTILLES-GUYANE SEPTEMBRE 2011 ... 7
ASIE JUIN 2011 ... 8
CENTRES ETRANGERS JUIN 2012 ... 9
LIBAN MAI 2012 ... 10
METROPOLE JUIN 2012 ... 11
PONDICHERY AVRIL 2011 ... 12

2010 ... **14**

ANTILLES-GUYANE SEPTEMBRE 2010 ... 14
LA REUNION SEPTEMBRE 2010 ... 15
LA REUNION JUIN 2010 ... 16
LIBAN JUIN 2010 ... 17
METROPOLE SEPTEMBRE 2010 ... 18
POLYNESIE JUIN 2010 ... 19

2009 ... **20**

ANTILLES-GUYANE SEPTEMBRE 2009 ... 20
ANTILLES-GUYANE JUIN 2009 ... 21
ASIE JUIN 2009 ... 22
LIBAN JUIN 2009 ... 23
METROPOLE & LA REUNION SEPTEMBRE 2009 ... 24

2008 ... **25**

AMERIQUE DU NORD MAI 2008 ... 25
AMERIQUE DU SUD NOVEMBRE 2008 ... 26
CENTRES ETRANGERS JUIN 2008 ... 27
LA REUNION JUIN 2008 ... 28
LIBAN JUIN 2008 ... 29
METROPOLE JUIN 2008 ... 30
POLYNESIE JUIN 2008 ... 31

2007 ... **32**

ASIE JUIN 2007 ... 32
LA REUNION JUIN 2007 ... 33
LIBAN JUIN 2007 ... 34

2001 ... **35**

AMERIQUE DU NORD JUIN 2001 ... 35
PONDICHERY AVRIL 2001 ... 36

1999 ... **37**

FRANCE METROPOLITAINE JUIN 1999 ... 37

2012

Amérique du Nord juin 2012

PARTIE A. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[\, 1\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

1. Soit g la fonction définie sur $[\, 1\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[\, 1\,;+\infty\,[$.

2. *a*. Montrer que, pour tout x de $[\, 1\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[\, 1\,;+\infty\,[$.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).

d. Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de (C) et (D).

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $M_k N_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $M_k N_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_k N_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Nouvelle Calédonie novembre 2012

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par : $f(x) = 5\ln(x \pm 3) - x$.

1. *a.* On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[\ 0;+\infty\ [$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a : $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

2. *a.* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[\ 14\ ;\ 15\ ]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout entier naturel } n \neq 0,\ u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par : $g(x) = 5\ln(x+3)$.

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite **D** d'équation $y = x$ et la courbe **C**, courbe représentative de la fonction g.

1. *a.* Construire sur l'axe des abscisses de **l'Annexe I** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. *a.* Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2.*a*.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq \alpha$$

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1.*b* de la partie 3.

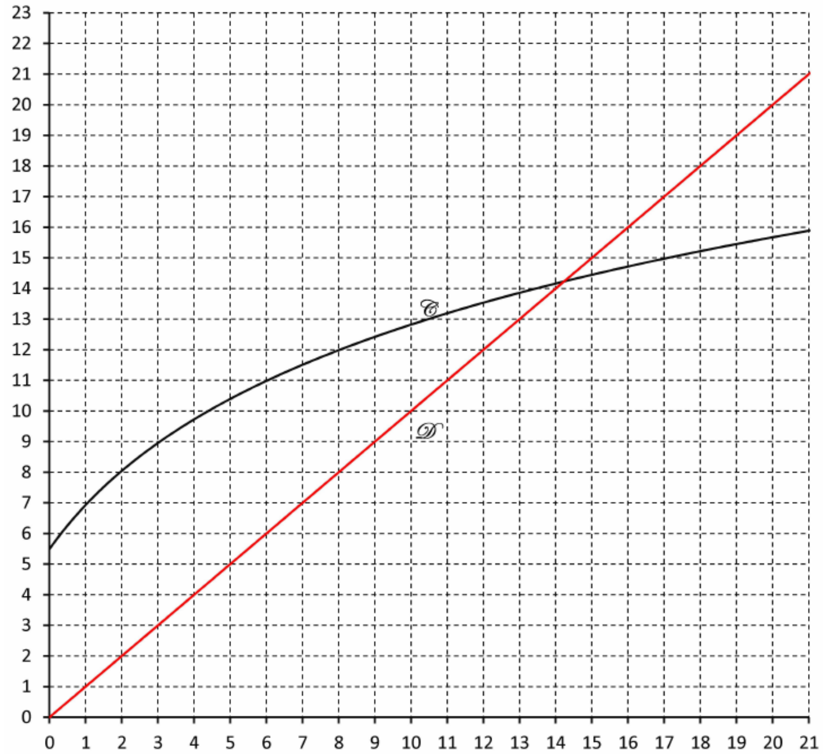
e. En utilisant la question 2.*a* de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14{,}2 < 0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher *u*

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).



Antilles–Guyane septembre 2012
Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

3. En déduire que si $x > \mathrm{e}$ alors $f(x) > \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > \mathrm{e}$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ;
Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
        Faire
              Affecter (X/lnX) à X
              Affecter Y +1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

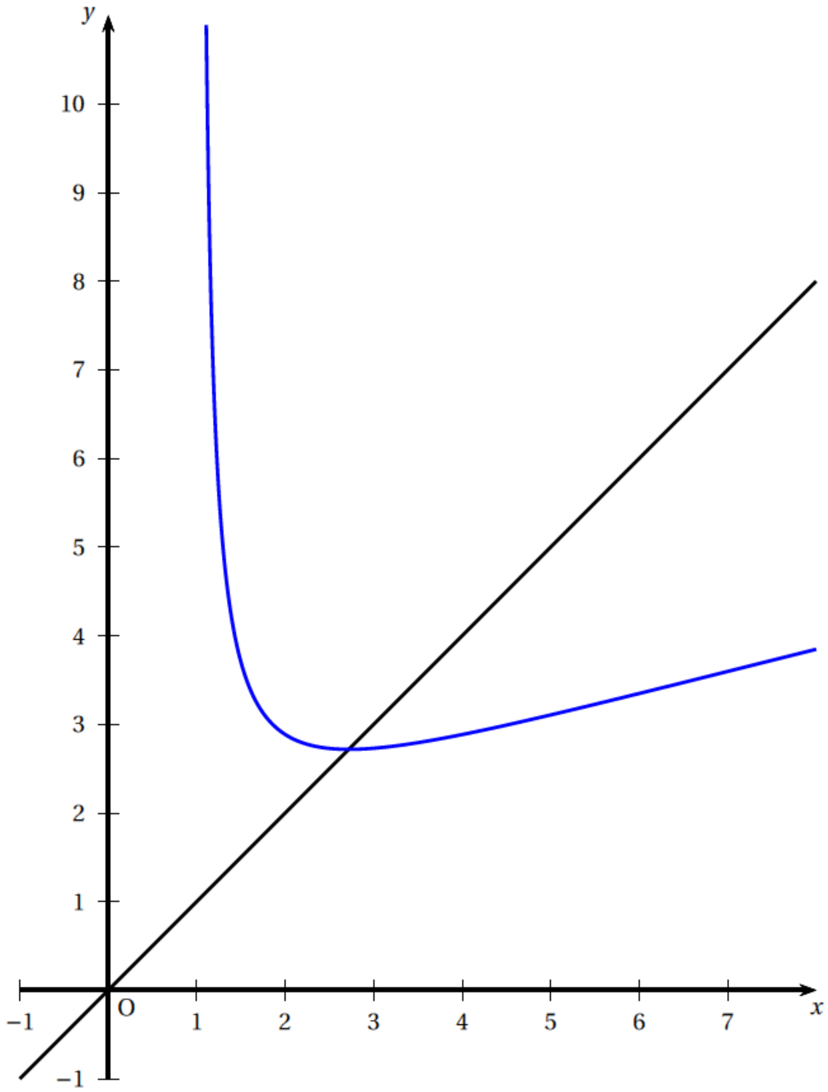
À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

ANNEXE

Exercice 4 Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie



2011

Amérique du Sud novembre 2011

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = x^2(1 - \ln x).$$

Partie A Étude de la fonction g

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de g en 0.

3. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. En utilisant les résultats précédents, étudier le signe de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B Représentation graphique et aire sous la courbe

Soit C la courbe représentative de la fonction g .

1. Tracer C dans un repère orthonormal ayant pour unité graphique 5 cm.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tracer sur le graphique.

3. Calculer l'aire en unités d'aire du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Antilles-Guyane septembre 2011

On considère la fonction f définie $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - 1$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;+\infty[$.

5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne en annexe la courbe C , représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$J = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer l'égalité : $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.

En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

Asie juin 2011

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C_f est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a. Déterminer les limites de la fonction *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*.

c. En déduire les variations de la fonction *f*.

2. Étude d'une fonction *g*

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note Cg la courbe représentative de la fonction *g* dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer la limite de *g* en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction *g*.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction *g*.

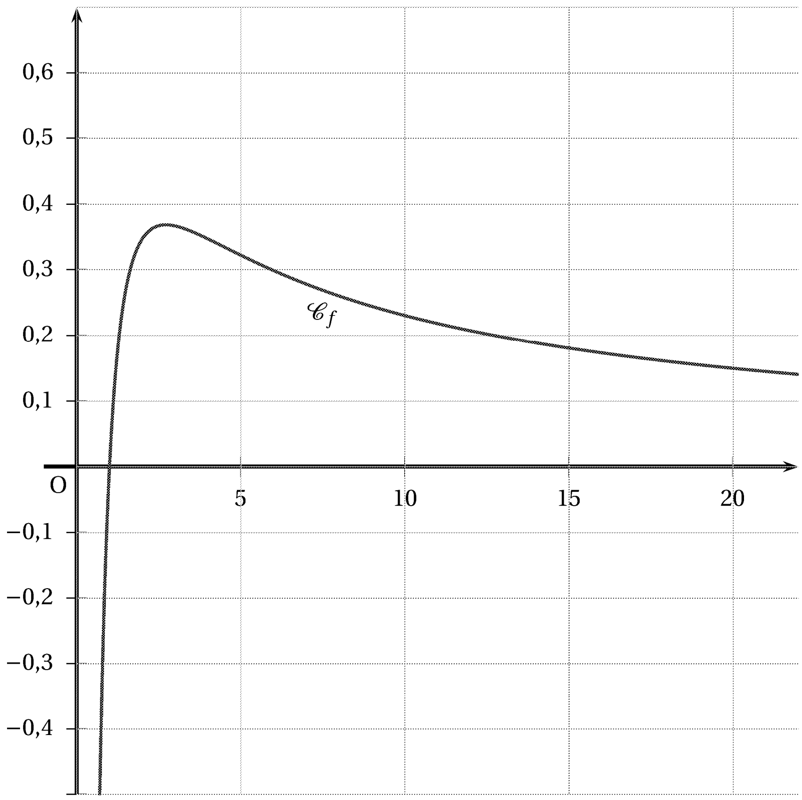
3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.

4. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire A comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire A.

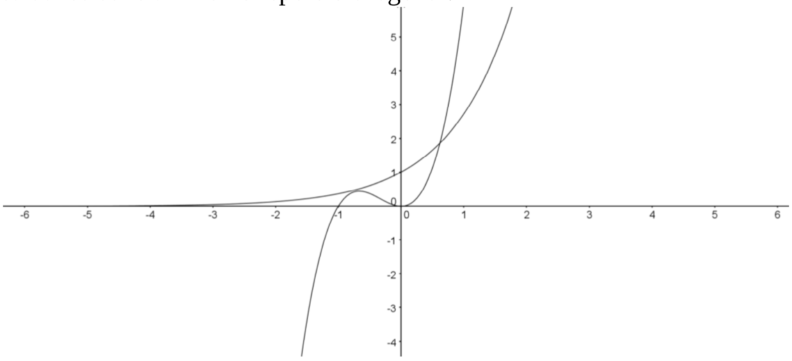


Centres étrangers Juin 2012
On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\,(x^2 + x^3)$.
Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\,(x^2 + x^3)$$

telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. *a.* Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x$.

Montrer que, sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, on a $h'(x) = \dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

b. Déterminer les variations de la fonction h.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

4. Conclure quant à. la conjecture de la **partie A.**

Liban mai 2012

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe C admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ.

3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
5. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

2. *a*. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine D quand n tend vers $+\infty$.

Métropole juin 2012
Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.
Partie A
On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$,

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.
Partie B
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u+\frac{1}{i}$,
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.
2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632

n	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C
Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1}-u_n=f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\geq 0$

En déduire que $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}$

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

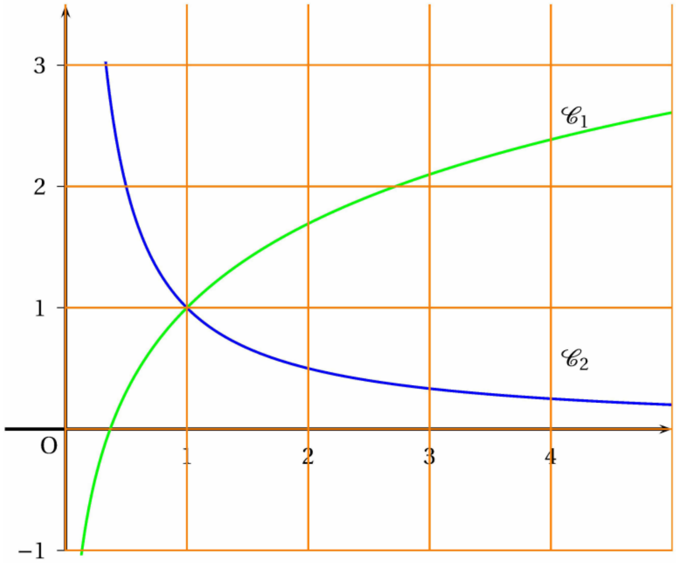
$$\ln(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n\geq 0$.
3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Pondichéry avril 2011

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On sait que :

– l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$

– l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathbf{C}_2$

– la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

– la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

– la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

• 0	• $+\infty$	• On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

• 0	• 0,2	• On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathbf{C}_1$ admet une asymptote oblique :

• Oui	• Non	• On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$+$	

x	0		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$-$	

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

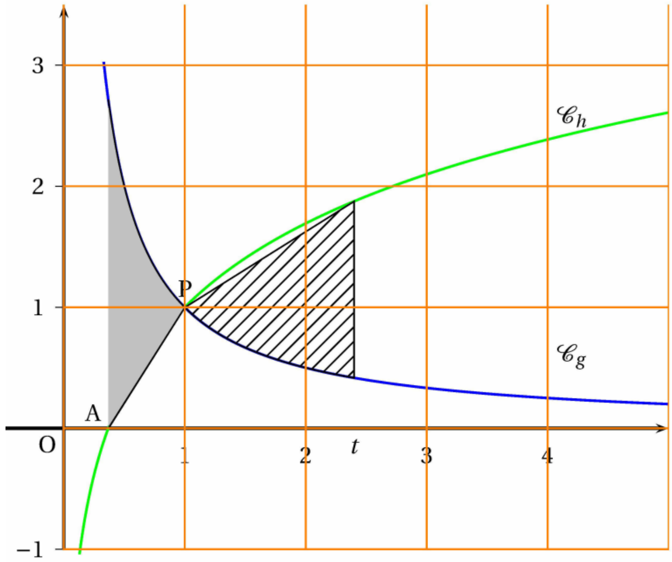
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ qu'on note R.

7. Donner un encadrement de R d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \ln(x) + 1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes **C** $_g$ et **C** $_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe **C** $_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2. P est le point d'intersection des courbes **C** $_g$ et **C** $_h$ Justifier que les coordonnées du point P sont (1 ; 1).

3. On note A l'aire du domaine délimité par les courbes **C** $_{gh}$, **C** $_h$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).

a. Exprimer l'aire A à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.

b. Montrer que $A = 1 - \frac{1}{e}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1 ; +\infty[$. On note B_t l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes **C** $_g$ et **C** $_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $A = B_t$.

a. Montrer que $B_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b. Conclure.

2010

Antilles-Guyane septembre 2010

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et que pour tout x de] 0 ; + ∞ [on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [qui à x associe $\frac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. Étudier les variations de g sur] 0 ; + ∞ [.

2. En déduire le signe de g sur] 0 ; + ∞ [.

II - Étude de la fonction *f* et tracé de sa courbe représentative C

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

2. Déterminer la limite en + ∞ de f puis montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C .

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [.

4. En déduire le sens de variation de f sur] 0 ; + ∞ [puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. Déterminer le point A de la courbe C en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.

6. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites D et T et la courbe C .

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe C .

On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

La Réunion septembre 2010

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f_k(x) = \ln(x) - k\,x^2 + 1$.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

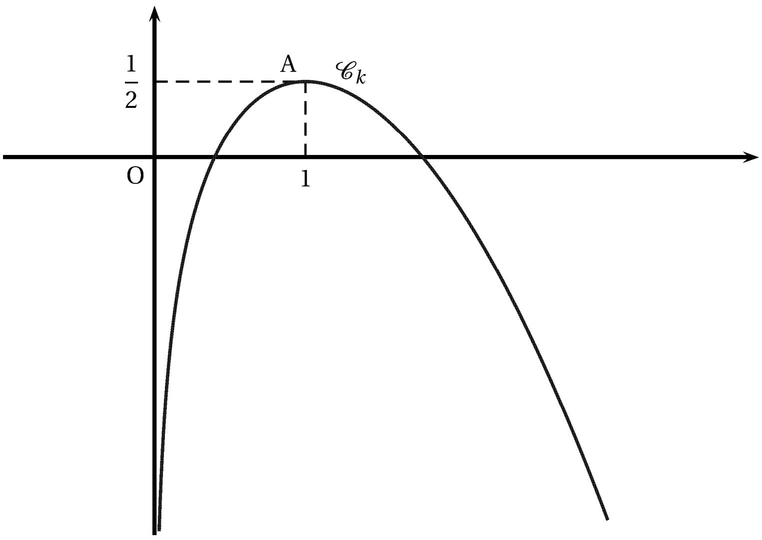
$$f'_k(x) = \frac{1 - 2\,k\,x^2}{x}.$$

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2\,k}}$		$+\infty$
f_k	‖	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2\,k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k. Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

La Réunion juin 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. *a.* Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n,

$$2 \leq u_n \leq \beta.$$

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Liban juin 2010

Partie A

Soit u la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur] 0 ; + ∞ [et préciser ses limites en 0 et en + ∞.

2. *a.* Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur] 0 ; + ∞ [. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur] 0 ; + ∞ [.

1. Exprimer, pour tout x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur] 0 ; + ∞ [.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à] 0 ; + ∞ [.

1. Montrer que la distance AM est donnée par AM = $\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur] 0 ; + ∞ [.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que AP = $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

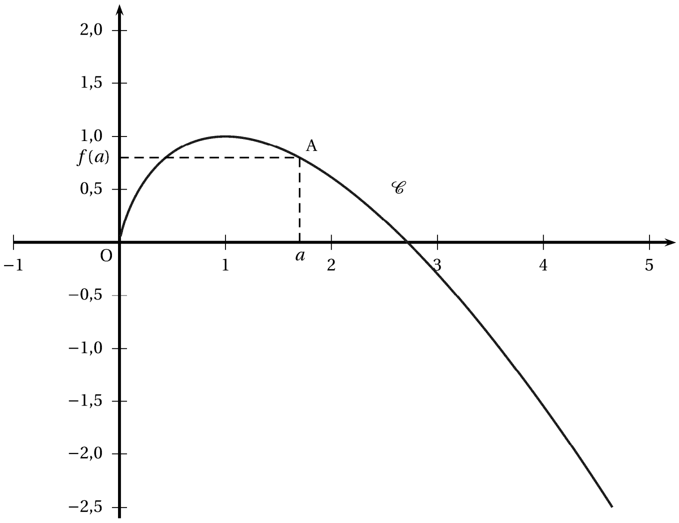
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

Métropole septembre 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



Partie 1 : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe C d'abscisse a.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note A(a) la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$.

1. Justifier que $A(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, en distinguant le cas $a < \text{e}$ et le cas $a > \text{e}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(a) en fonction de a.

Polynésie juin 2010

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

a. En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)\,e^{1-x}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\,e^{1-t}\,dt$$

a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x) = -x\,e^{1-x} + 1$.

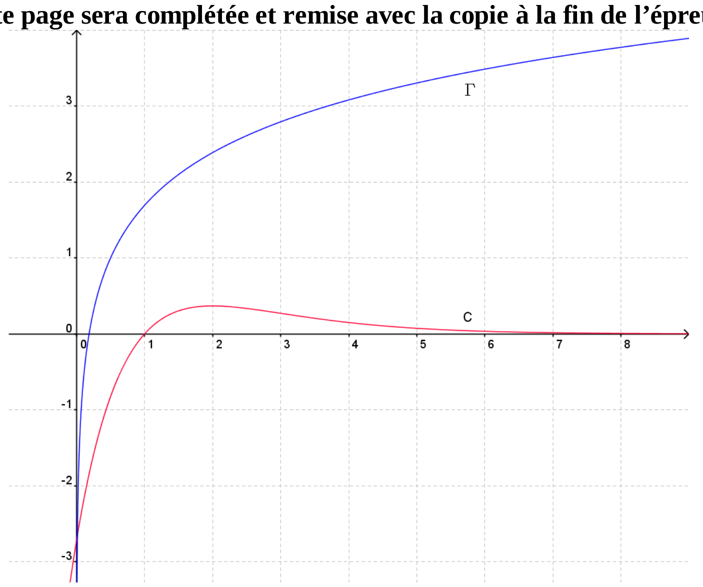
c. Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve



2009

Antilles-Guyane septembre 2009

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle] 0 ; 1] par :

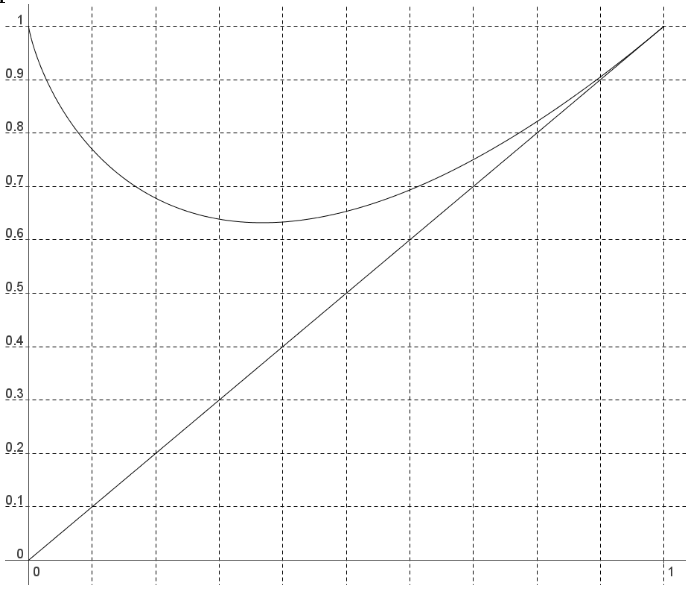
$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; 1].

C est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

La courbe C et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. a. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x \ln x$ sur] 0 ; 1], montrer que, pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1], on a $f(x) \leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1].

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1] par $g(x) = 1 + x \ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle] 0 ; 1] et dresser le tableau de variation de g.

On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T.

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\, dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C , la droite T et l'axe des ordonnées.

Antilles-Guyane juin 2009

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f ,montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que :

pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Asie juin 2009

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}.$$

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.

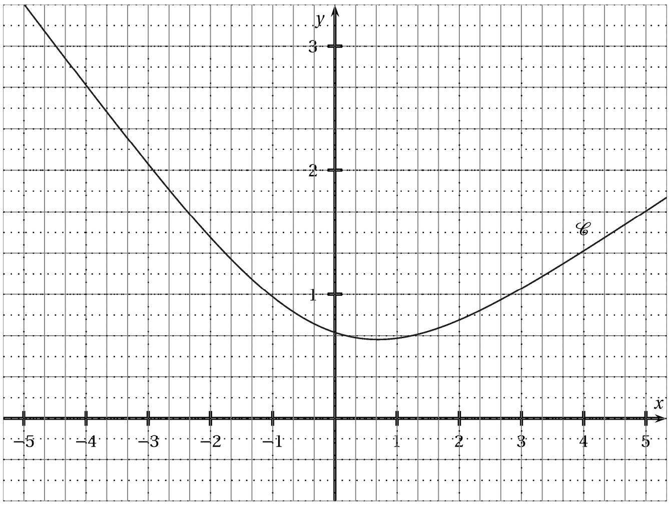
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Liban juin 2009

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier la position relative de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^{x} + 1) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^{x} - 2}{3(e^{x} + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\,dx$$

2. On admet que pour tout réel x, $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Métropole & La Réunion septembre 2009

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + 4).$$

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

(a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

(b) Montrer que sur l'intervalle $[2 ; 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.

(c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

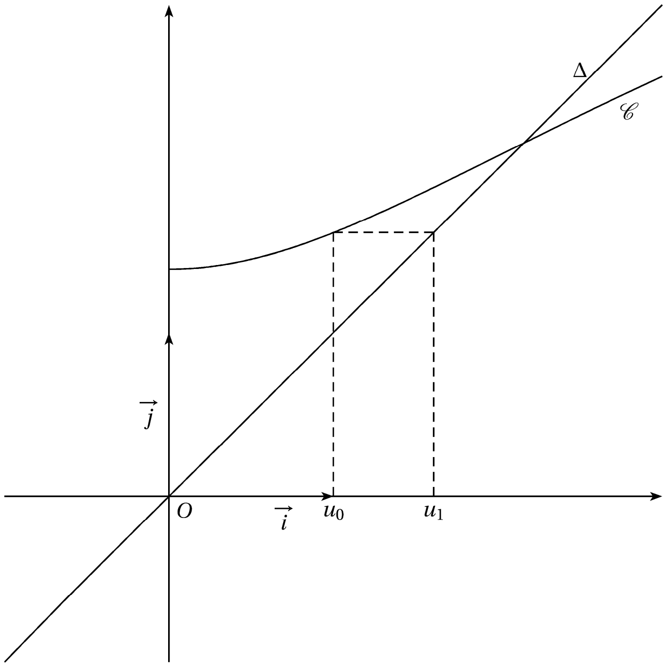
PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

La courbe C représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).



1. À partir de u_0, en utilisant la courbe C et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe C qui a pour abscisse α.

3. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq \alpha$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

(c) Déterminer sa limite.

2008

Amérique du Nord mai 2008

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. *a*. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$.

Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de Γ.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$.

Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = f(x) - x f'(x).$$

b. Montrer que sur $]\,1\,;+\infty\,[$, les équations :

$$g(x) = 0 \text{ et } (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$$

ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

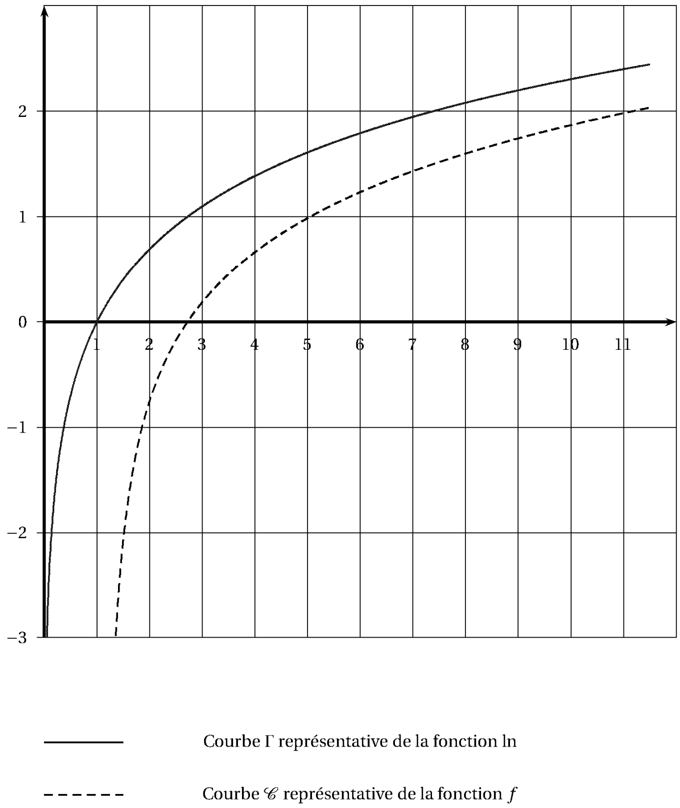
La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe.

Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]\,1\,;10\,]$.

Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



Amérique du Sud novembre 2008

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [, positive sur [1 ; + ∞ [, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln\left(x\,y\right) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ \left[\ln\left(x\right)\right]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln\left(2\right) \approx 0{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur] 0 ; + ∞ [.

b. En déduire le signe de f puis que,

$$\text{pour tout } x > 1,\ 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en + ∞ de la fonction f_n.

Centres étrangers juin 2008

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

II. Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$.

2. Étude de la fonction *f*

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C .

b. Déterminer la position de C par rapport à (Δ).

c. Tracer la courbe C et la droite (Δ).

III Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe C , la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\mathcal{A}(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

b. Déterminer la limite ℓ de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse,sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que $\ell = \mathcal{A}\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

La Réunion juin 2008

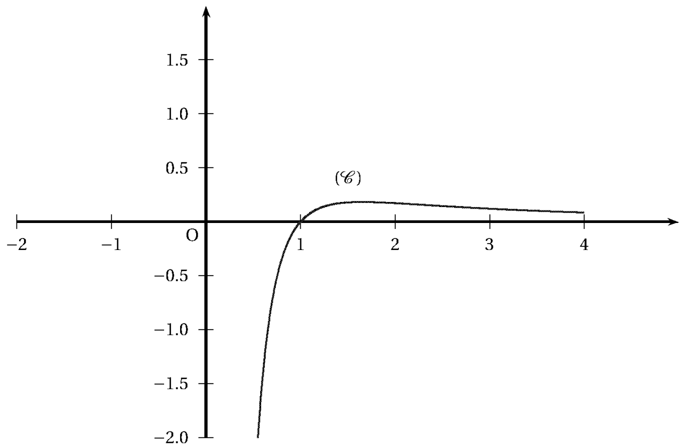
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Sa courbe représentative (C), construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.

Énoncer puis démontrer ces propriétés.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il des tangentes à la courbe (C) qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. *a.* Que représente f pour la fonction g ?

b. En déduire le sens de variations de g sur $]\,0\,;+\infty[$.

2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}.$$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Liban juin 2008

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« une suite tend vers + ∞ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers + ∞.

Partie B

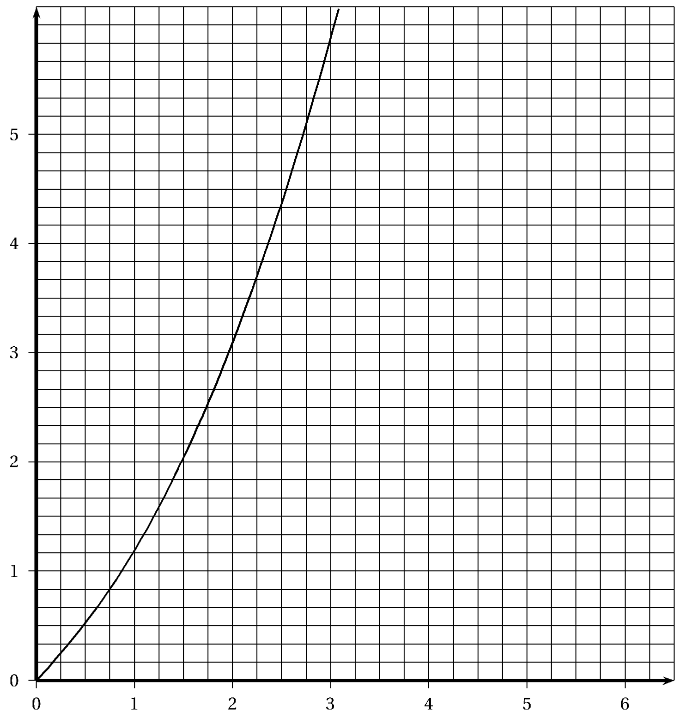
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci- dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; + ∞ [.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur



Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers + ∞ ?

3\. *a*. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

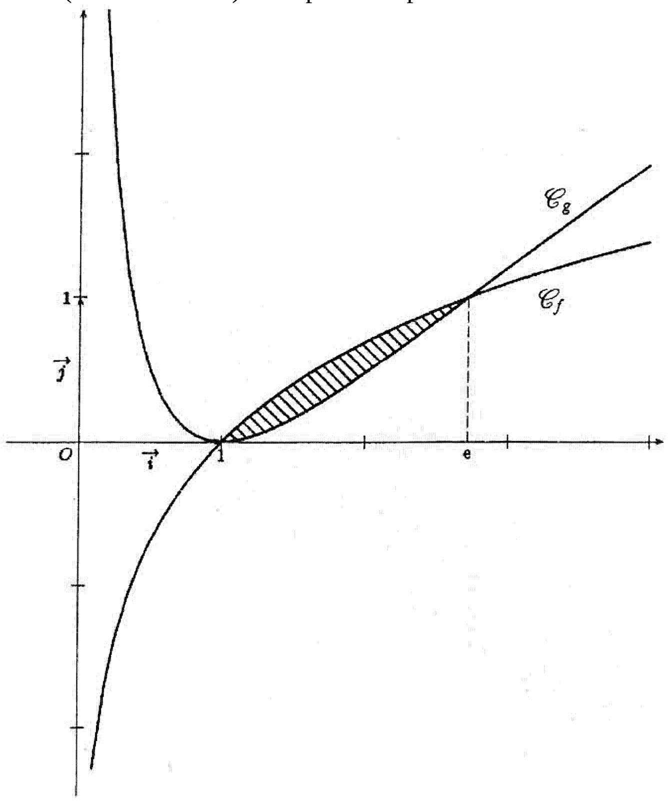
c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

Métropole juin 2008

Les courbes C_f et C_g données ci-dessous représentent respectivement dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), les fonctions f et g définies sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.



On note : $I = \int_1^e \ln x \, dx$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $F'(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

c. En déduire J.

d. Donner la valeur de A.

2. Dans cette question Ie candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour x appartenant à l'intervalle [1 ; e], on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Polynésie juin 2008

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

– Si $u \geq 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

– Pour tous réels α et β,

$\int_a^b [\alpha\, u(x) + \beta\, v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}).$$

Sa courbe représentative (C) ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. *a.* Montrer que la courbe (C) admet pour asymptote la droite (D).

b. Étudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Soit I l'intégrale définie par :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$$

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1 + t) \leq t$.

(On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$.)

On admettra que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t)$.

c. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \leq \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{-x}$$

d. Montrer que : $\ln\left(\dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-1}}\right) \leq \mathrm{I} \leq 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

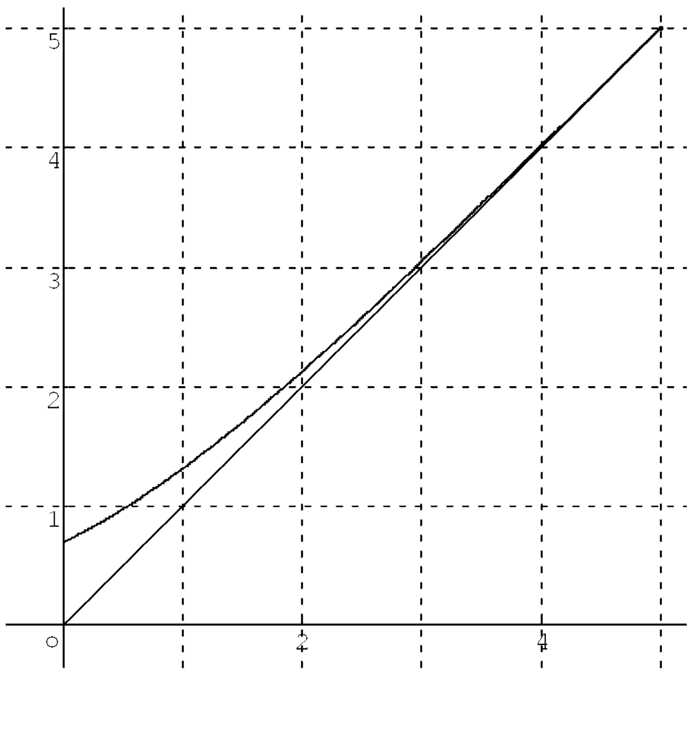
e. En déduire un encadrement de I d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



2007

Asie juin 2007

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle] 0 ; + ∞ [, les solutions de l'équation $E_a : x^a = a^x$.

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.

On note h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.

a. **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers + ∞, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers + ∞. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et + ∞.

c. Etudier les variations de h sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

a. Déterminer les limites de f en 0 et +∞. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Etudier les variations de f sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

d. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1): si $a \in$] 0 ; 1], alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2): si $a \in$] 1 ; e [∪] e ; + ∞ [, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle] 1 ; e [et l'autre appartenant à l'intervalle] e ; + ∞ [.

La Réunion juin 2007

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.

Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe.

2. Restitution organisée de connaissances

On suppose connue la propriété :

« Pour tout couple $(x ; y)$ de nombres réels strictement positifs, on a :

$$\ln (x\,y) = \ln(x) + \ln(y). \text{ »}$$

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a :

$$\ln\left(\sqrt{m}\right) = \frac{1}{2}\ln(m).$$

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{a\,b}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

Liban Juin 2007

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note C et C ′ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes C et C ′ sont données en annexe.

1. *a.* Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b En déduire la position relative des deux courbes C et C ′ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Pour x appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C ′ de même abscisse.

a. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Étudier les variations de la fonction h sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. En déduire que sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

c. Résoudre dans $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

d. En déduire que, sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. *a.* A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.

b. Vérifier que la fonction G définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$G(x) = x\,[\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\,]$$

est une primitive de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes C , C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.

2001

Amérique du Nord Juin 2001

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1\,.$$

a. Montrer que la fonction g est dérivable et que pour tout $x \in\,]\,0\,,+\infty\,[$: $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. *a*. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $x \in\,]\,0, +\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

puis donner le tableau de variations de f .

Partie B

Γ désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, unité graphique 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par :

$$h(x) = x + \ln x\,.$$

a. Étudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,0{,}7]$.

b. Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$,

2. *a*. Vérifier que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

b. Utiliser les résultats de la question 1.*a*. pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ.

3. Construire Γ et Δ dans le repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

4. *a*. Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

b. En déduire l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x=2$.

Pondichéry avril 2001

Dans tout le problème, C désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.

Question préliminaire : tracer, avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe C et la droite D d'équation $y = x$.

Partie A

1\. *a.* Déterminer une équation de la tangente Δ à C au point I d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.

En déduire la position de C par rapport à Δ.

2\. *a.* Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b. M et N sont les points de même abscisse x des courbes C et D respectivement.

Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance M N lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

1\. Soit M le point d'abscisse x de la courbe C. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

2\. Étude de la fonction auxiliaire u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 + \ln x.$$

a. Justifier les limites de $u(x)$ en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variation de u.

b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.

Justifier que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.

3\. Étude de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$.

En déduire le tableau de variation de g.

4\. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe C et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question 2.*b*.

5\. A étant le point d'abscisse α, de C, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C - Étude d'une suite

1\. Montrer que le réel α défini dans la partie B est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x).$$

2\. *a.* Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

c. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle on a :

$$0 \leq h'(x) \leq 0{,}3.$$

3\. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h(u_n)$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3\,|u_n - \alpha|$ puis que

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}3)^n$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

1999

France métropolitaine juin 1999

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A

Etude d'une fonction f et de sa courbe représentative C .

On considère la fonction f, définie sur] 0 ; + ∞ [par :

$f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Déterminer les limites de f en + ∞ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par :

$$u(x) = \ln x + x - 3$$

a. Etudier les variations de u.

b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3]. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.

c. Etudier le signe de $u(x)$ sur]0 ; + ∞ [.

4. *a.* Etudier les variations de f .

b. Exprimer $\ln \alpha$ comme polynôme en α.

Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5. *a.* Etudier le signe de $f(x)$.

b. Tracer C .

Partie B

Etude d'une primitive de f sur] 0 ; + ∞ [.

Soit F la primitive de f sur]0 ; + ∞ [qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. *a.* Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur] 0 ; + ∞ [.

b. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2.

2. Calcul de $F(x)$

a. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t \, dt$ (on pourra faire une intégration par parties).

b. Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$

c. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3. *a.* Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.

b. Montrer que, pour x strictement supérieur à l,

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3 .$$

En déduire la limite de F en + ∞.

c. Dresser le tableau de variation de F

d. Tracer Γ sur le même graphique que C.

4. Calcul d'une aire

Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.