Métropole Juin 2014

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

1 Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées (0 ; 1).

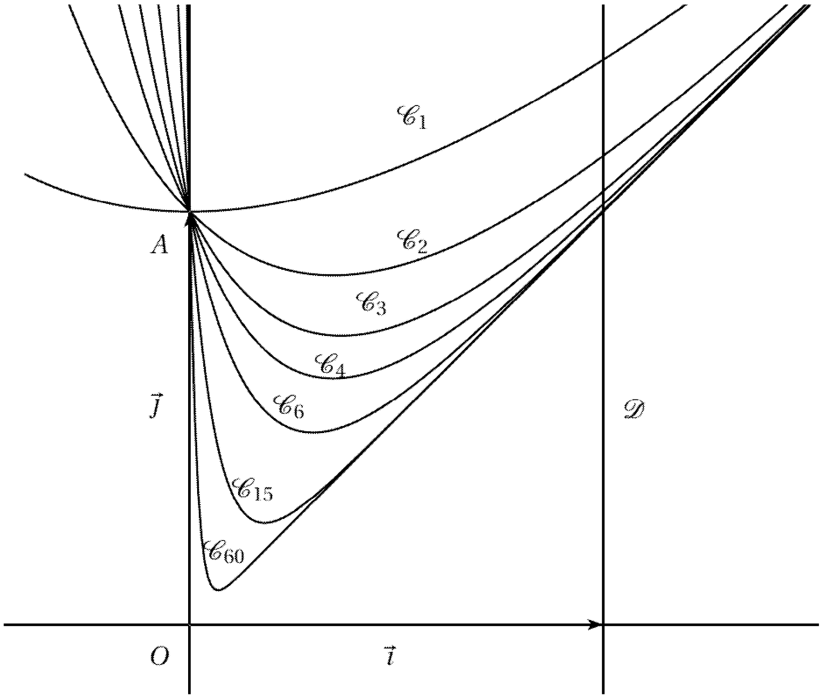
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})\, dx$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pour tout entier naturel *n*, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^{-nx}$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier *n* et la droite d'équation $x = 1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^{x})\, dx$.

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$, puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de *n* et déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 099 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1%. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note *M* l'évènement « la personne choisie est malade » et *T* l'évènement « le test est positif »

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'événement *T* est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade »

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par *x* la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de *x* le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $Y(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme, On arrondira à 10^{-2}.

b Déterminer l'entier positif *h* tel que $P(900 - h \leq X \leq 900 + h) = 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué *a* permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous.les candidats

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans :$\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$. Calculer a^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$.

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué est également une solution de (E).

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre *ABCD* dont les faces *ABC*, *ACD* et *ABD* sont des triangles rectangles et isocèles en *A*. On désigne par *E*, *F* et *G* les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*BC*] et [*CA*].

On choisit *AB* pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1. On désigne par **P** le plan qui passe par *A* et qui est orthogonal à la droite (*DF*). On note *H* le point d'intersection du plan **P** et de la droite (*DF*).

a Donner les coordonnées des points *D* et *F*.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (*DF*).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan **P**.

d. Calculer les coordonnées du point *H*.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par *M* un point de la droite (*DF*) et par *t* le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point *M* pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle *MEG* est isocèle en *M*.

En déduire que $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a, et b, les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années. En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\,X_n + B$.

b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = A\,Y_n$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2\,Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2\,Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, $Y_{2n} = 2^n\,Y_0$.

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n\,Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \text{ et } a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A aune capacité limitée à 10000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

CORRECTION

Exercice 1

Partie A

$f_1(0) = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$. Donc A $\in \mathbf{C}_1$

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = 1 - e^{-x}$.

$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow 0 < x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

$f_1(x) = e^{-x}(x\,e^x + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

a. La fonction f_n est positive sur $[\,0\,;1\,]$ donc I_n correspond à la mesure de l'aire comprise entre la courbe $\mathbf{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. Il semblerait que :
- la courbe **C** $_{n+1}$ est en dessous de la courbe **C** $_n$ sur [0 ; 1] donc les aires situées entre les courbes, l'axe des abscisses et les 2 droites verticales soit de plus en plus petite. La suite (I_n) semble donc décroissante.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) - x = 0$ donc la limite de I_n semble être l'aire du triangle rectangle OAA' où A' est le point de coordonnées (1 ; 1) donc la limite de I_n semble être $\frac{1}{2}$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x})\,dx - \int_0^1 (x + e^{-nx})\,dx \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [(x + e^{-(n+1)x}) - (x + e^{-nx})]\,dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-nx})\,dx$ or $e^{-(n+1)x}(1 - e^x) = e^{-(n+1)x} - e^{-(n+1)x} \times e^x = e^{-(n+1)x} - e^{-nx}$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)\,dx$.

Sur [0 ; 1] on a : $e^x \geq 1$ donc $1 - e^x \leq 0$. L'exponentielle est toujours positive donc $e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
La suite (I_n) est décroissante.

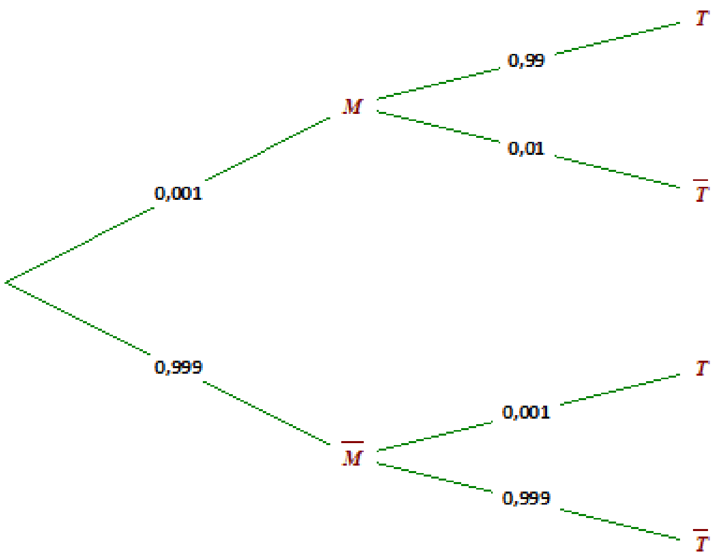
La suite est décroissante et minorée par 0 (intégrale d'une fonction positive) donc elle converge.

Si $n = 0$: $I_0 = \int_0^1 (x+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

Si $n > 0$: $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 2
Partie A
1. *a.*

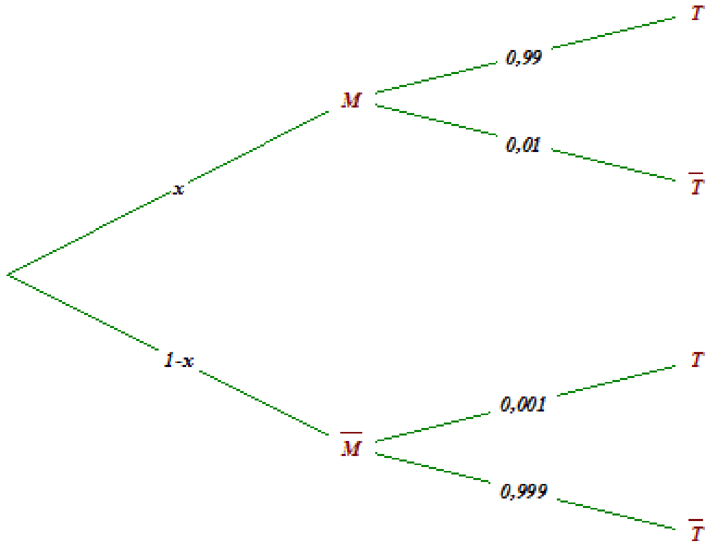


b. D'après la formule des probabilités totales on a :
$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$
$P(T) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001$
$P(T) = 0{,}001989 = 1{,}989 \times 10^{-3}$

c. $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)}$ $P_T(M) = \frac{0{,}001 \times 0{,}99}{1{,}989 \times 10^{-3}}$

$P_T(M) = \frac{99}{198{,}9}$ or $2 \times 99 = 198$ donc $\frac{99}{198{,}9} < 0{,}5$
Si le test est positif, il y a donc moins d'une chance sur 2 que la personne soit malade. L'affirmation est vraie.

2. On obtient alors l'arbre ci-contre.



En utilisant la formule des probabilités totales on obtient :
$P(T) = 0{,}99\,x + 0{,}001\,(1 - x) = 0{,}001 + 0{,}989\,x$

On veut que $P_T(M) > 0{,}95$ donc que $\dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} > 0{,}95$

$\dfrac{0{,}99\,x}{0{,}001 + 0{,}989} > 0{,}95 \;\Leftrightarrow 0{,}99\,x \geq 0{,}95\,(0{,}001 + 0{,}989\,x)$

$\Leftrightarrow 0{,}05045\,x \geq 0{,}00095 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{0{,}00095}{0{,}05045} \;\Leftrightarrow x \geq \dfrac{19}{1009}$
soit environ 0,0188 donc 1,88 %
Il faut donc que $x \geq 1{,}88$ % pour que le laboratoire commercialise le test.

Partie B

1. *a.* $P(890 \leq X \leq 920) \approx 0{,}92$

b. A la calculatrice : $P(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0{,}99 \Leftrightarrow 900 + h \approx 918{,}031$ donc $h \approx 18{,}031$

2. $n = 1000$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 970$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 30$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donc : $I = \left[0{,}97 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97 \times 0{,}03}{1000}}\,;\,0{,}97 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97 \times 0{,}03}{1000}}\right]$

$I \approx [0{,}959 ; 0{,}991]$

La fréquence observée des comprimés conformes est $f = 0{,}947$ donc $f \notin I$ De plus $f < 0{,}959$.

Les réglage faits par le laboratoire ne sont donc pas convenables.

Exercice 3

1. $Z^2 + 4\,Z + 16 = 0$, calculons $\Delta = 4^2 - 4 \times 16 \times 1 = -48 < 0$

L'équation possède donc 2 solutions complexes : $Z_1 = \dfrac{-4 + 4\,i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\,i\sqrt{3}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 - 2\,i\sqrt{3}$.

$|\,Z_1\,| = 4$ par conséquent $Z_1 = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $Z_2 = \overline{Z_1} = 4\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $a^2 = 2^2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = Z_1$

$z^2 = z^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z - a)\,(z + a) = 0$ donc les solutions de $z^2 = -2 + 2\,i\sqrt{3}$ sont $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $-a = -1 - i\sqrt{3}$

3. z_1 et z_2 sont deux complexes donc il existe x, x', y, y' réels tels que $z_1 = x + i\,y$ et $z_2 = x' + i\,y'$

$z_1 \times z_2 = (x + i\,y)\,(x' + i\,y')$ donc $\overline{z_1\,z_2} = x\,x' - y\,y' - i\,(x\,y' + y\,x')$

$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (x - i\,y)\,(x' - i\,y') = x\,x' - y\,y' - i\,(x\,y' + y\,x')$ donc $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{z_1\,z_2}$.

Pour démontrer la seconde propriété, effectuons une récurrence :

Initialisation : $\overline{z_1^{\,1}} = \overline{z_1} = \overline{z_1}^{\,1}$. La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang *n*.

$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z}$

D'après l'hypothèse de récurrence : $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ donc $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^{\,n} \times \overline{z} = \overline{z}^{\,n+1}$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

La propriété est vraie au rang 1, en la supposant vraie au rang n elle est encore vraie au rang suivant donc pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Soit z une solution de (E) alors $z^4 + 4\,z^2 + 16 = 0$

$\overline{z^4 + 4\,z^2 + 16} = \overline{z}^{\,4} + 4\,\overline{z} + 16$ donc $\overline{z}^{\,4} + 4\,\overline{z} + 16 = 0$ donc $\overline{z}$ est également solution de (E).

(E) admet pour solutions a et $-a$ donc admet aussi pour solution $\overline{a}$ et $-\overline{a}$. Ces solutions sont distinctes et (E) admet au plus 4 solutions donc les solutions de (E) sont : $1 + i\sqrt{3}\,;\,-1 - i\sqrt{3}\,;\,1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $D(0 ; 0 ; 1)$ et $F(0{,}5 ; 0{,}5 ; 0)$

b. $\overrightarrow{DF}$ $(0{,}5 ; 0{,}5 ; -1)$ donc une représentation paramétrique de (DF) est : $\begin{cases} x = 0{,}5\,t \\ y = 0{,}5\,t\,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$

c. $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan **P** donc une équation du plan **P** est de la forme : $0{,}5\,x + 0{,}5\,y - z + d = 0$

A appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc son équation : $0 + 0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$

Une équation de **P** est $0{,}5\,x + 0{,}5\,y - z = 0$ ou encore $x + y - 2\,z = 0$.

d. Les coordonnées de *H* vérifient les équations de (DF) et de **P**.

On injecte donc dans l'équation du plan les équations paramétriques :

$0{,}5\,t + 0{,}5\,t - 2(1 - t) = 0 \Leftrightarrow -3\,t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$ donc le point *H* a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

e. $E(0,5\,;0\,;0)$ donc $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $G(0\,;0,5\,;0)$ donc $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}\frac{1}{3};-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

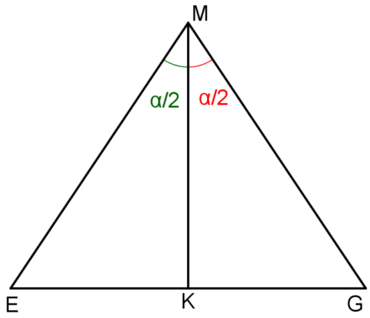
$\overrightarrow{EH}\,.\,\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux. L'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

2. *a.* Soit $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées de M. $\overrightarrow{DM}=t\,\overrightarrow{DF}$ donc : $\begin{cases}x=0,5\,t\\y=0,5\,t\\z-1=-t\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=0,5\,t\\y=0,5\,t\\z=1-t\end{cases}$ donc $\overrightarrow{EM}\begin{cases}0,5\,t-0,5\\0,5\,t\\1-t\end{cases}$

$ME^2=\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)^1+\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(1-t)^2 \Leftrightarrow ME^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+\frac{1}{4}t^2+t^2-2t+1 \Leftrightarrow \boldsymbol{ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}}$.

b. $\overrightarrow{GM}\begin{cases}0,5\,t\\0,5\,t-0,5\\1-t\end{cases}$ donc $MG^2=\left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)^1+(1-t)^2$

$MG^2=EM^2$ donc le triangle MEG est isocèle en M.



Le triangle MEG est isocèle en M donc si K est le milieu de $[EG]$, (MK) est bissectrice de l'angle $\widehat{EMG}$ et hauteur issue de M donc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{EK}{ME}$ soit $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=EK$

$EK=\frac{1}{2}EG$ et $EG=\sqrt{0,5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $EK=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. $\alpha\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x\longrightarrow\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est croissante

α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

$ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\,ME\sqrt{2}}$

α maximale $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ maximal $\Leftrightarrow$ ME minimal

$ME\geq 0$ or la fonction $x\longrightarrow x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc ME minimal $\Leftrightarrow ME^2$ minimal

α maximale $\Leftrightarrow ME^2$ minimal

d. Pour déterminer le minimum de ME^2 on va trouver la valeur de t telle que $\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$ soit minimal.

Soit $f(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$**,** donc $f\,'(t)=3\,t-\frac{5}{2}$ donc :

t	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f\,'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est minimal quand $t=\frac{5}{6}$

Les coordonnées du point M cherché sont $\left(\frac{5}{12}\,;\frac{5}{12}\,;\frac{1}{6}\right)$.

Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Au bout d'un an, le pisciculteur vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B, il achète en plus 100 poissons pour le bassin B, donc $b_1 = a_0 + 100 = 200 + 100 = 300$

La vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A donc de 2×100 poissons, achète en plus 200 poissons pour le bassin A donc $a_1 = 2 \times 100 + 200 = 400$

$a_2 = 2 \times b_1 + 200 = 800$

$b_2 = a_1 + 100 = 500$

2. *a*. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2 \times b_n + 200$ et $b_{n+1} = a_n + 100$

$A\,X_n + B = \begin{pmatrix} 2\,b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\,X_n + B$.

b. x et y sont solution du système : $\begin{cases} x = 2\,y + 200 \\ y = x + 100 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - 2\,y = 200 \\ -x + y = 100 \end{cases}$. Par addition terme à terme : $-y = 300$ donc $y = -300$ et $x = 2 \times (-300) + 200 = -400$

c. $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 400 \\ b_{n+1} + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,b_n + 200 + 400 \\ a_{n+1} + 100 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,(a_n + 200) \\ a_n + 400 \end{pmatrix} = A\,Y_n$

3. ***a.*** Pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2} = A\,Y_{2n+1} = A \times A\,Y_{2n} = A^2\,Y_{2n} = A^2\,Z_n$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I$ donc pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2\,Z_n$.

b. $Y_{2n+1} = A\,Y_{2n} = 2^n\,A\,Y_0$ or $A\,Y_0 = Y_1$ donc $Y_{2n+1} = 2^n\,Y_1$

$Y_0 = \begin{pmatrix} a_0 + 400 \\ b_0 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$

$Y_{2n} = 2^n\,Y_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$ donc $a_{2n} + 400 = 2^n \times 600$

donc $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$

$Y_1 = \begin{pmatrix} a_1 + 400 \\ b_1 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}$

$Y_{2n+1} = 2^n\,Y_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}$ donc $a_{2n+1} + 400 = 2^n \times 800$ soit $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

4. Le bassin A aune capacité limitée à 10000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

On reconnaît dans les deux affectations de la variable a dans la boucle, dépendant de plus de la parité de p, les relations déduites à la question 3-*b*.

Si p est pair alors $p = 2\,n$ par conséquent, dans l'algorithme, on calcule $a_{2n} = a_p$ d'après la question précédente.

Si p est impair alors $p = 2\,n + 1$ par conséquent, dans l'algorithme, $n = \dfrac{p-1}{2}$ et on calcule $a_{2k+1} = a_p$ d'après la question précédente.

Dans tous les cas on calcule la population du bassin A au bout de p années.

b.

Initialisation :	Affecter à p la valeur 0 Affecter à a la valeur 200
Traitement :	Tant que $a \leq 10\,000$ p prend la valeur $p + 1$ Si p est pair Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$ Affecter à a la valeur $600 \times 2^{n} - 400$. Sinon Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$ Affecter à a la valeur $800 \times 2^{n} - 400$. Fin de Si Fin Tant que Affecter à p la valeur $p - 1$
Sortie :	Afficher p

L'algorithme doit afficher le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A, au bout de p années, le nombre de poissons est supérieur à 10 000 donc le bassin est inutilisable.

Application :

p	Test parité	$600 \times 2^{n} - 400$	$800 \times 2^{n} - 400$	Test $a \leq 10\,000$
0	pair	200		OUI
1	impair		1200	OUI
2	pair	2000		OUI
3	impair		6000	OUI
4	pair	9200		OUI
5	impair		25200	NON

Affichage : $p = 4$