Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.
Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.
Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

Partie B

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$

4. Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 7$

CORRECTION

Partie A

1. FAUX ce sera vrai sauf si la limite de (u_n) est 0

contre exemple: soit la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$, aucun de ses termes n'est nul, et cette suite converge vers 0, $v_n = -2n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

2. VRAI

$u_n > 2$ donc $0 < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{-2}{u_n} > \frac{-2}{2}$ soit $v_n > -1$

3. FAUX voir le contre exemple de la question 1

soit la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$, aucun de ses termes n'est nul, et cette suite est décroissante
$v_n = -2n$ donc (v_n) est décroissante.

Partie B

4. Vérification :

$u_0 = 3$ donc $0 \leq u_0 \leq 7$, la propriété est vraie pour $n = 0$

Démontrons que pour tout n : $0 \leq u_n \leq 7$ implique $0 \leq u_{n+1} \leq 7$
$0 \leq u_n \leq 7$ donc $0 \leq 7u_n \leq 7 \times 7$
donc $0 \leq \sqrt{7u_n} \leq 7$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 7$
donc pour tout n, on a démontré que si la propriété est vraie au rang n alors, elle est vraie au rang $n + 1$.
La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$