

Liban juin 2009

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).
- c.** Étudier la position relative de (D) et de (C).
- d.** Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
- e.** En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

- b.** En déduire les variations de la fonction f .

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$.
2. On admet que pour tout réel x , $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).

On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

CORRECTION**Partie A**

1. **a.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1$ or $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- b.** $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (C).

- c.** $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $1 + e^{-x} > 1$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$ soit $\ln(1 + e^{-x}) > 0$

donc pour tout réel x , $f(x) - \frac{1}{3}x > 0$ donc la courbe (C) est au dessus de (D).

- d.** pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^x) - x + \frac{1}{3}x$

pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

- e.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$ de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

On pourrait en déduire que la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe (C).

$$2. a. \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x - 2(e^x + 1)}{3(e^x + 1)} = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

b. $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$, la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$
d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	M	$+\infty$

Partie B

1. La courbe (C) est au dessus de la droite (D) pour tout x réel, $n \geq 0$ donc $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$

2. Les fonctions $x \rightarrow \ln(1 + e^{-x})$ et $x \rightarrow e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ de plus $n \geq 1$ donc :

$$\int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq \int_0^n e^{-x} dx \text{ soit } d_n \leq \left[-e^{-x} \right]_0^n = 1 - e^{-n} \text{ donc } d_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$$

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx - \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx$$

La fonction $x \rightarrow \ln(1 + e^{-x})$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $n < n+1$ donc $\int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx \geq 0$ donc la suite d_n est croissante.

La suite d_n est croissante majorée par 1 donc est convergente.

Partie C

1. le coefficient directeur de (T) est $f'(0) = -\frac{1}{6}$

2. M a pour abscisse x et pour ordonnée $y = \ln(1 + e^x) - \frac{2}{3}x$ et N a pour abscisse $x' = -x$ et pour ordonnée $y' = f(x')$

$$y' = \ln(1 + e^{x'}) - \frac{2}{3}x' = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{2}{3}x = \ln(1 + e^x) - \frac{1}{3}x$$

$$\text{Le coefficient directeur de (MN) est } \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\ln(1 + e^x) - \frac{2}{3}x - \left[\ln(1 + e^x) - \frac{1}{3}x \right]}{x + x} = -\frac{\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$$

la droite (MN) a le même coefficient directeur que la droite (T) donc la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

