Métropole juin 2016

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(– 1, 0, 1), D(2, 1, – 1), E(– 1, – 2, 3) et F(– 2, – 3, 4).

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (ABC)

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

CORRECTION

Affirmation 1 : FAUSSE

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les trois points A, B, et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : VRAIE

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + (-2) \times 1 + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + (-2) \times 1 + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : VRAIE

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2+1 \\ -3+2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = -2$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants.

B(3, 0, 1), C(– 1, 0, 1), donc leur milieu I a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1).

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} -2-1 \\ -3-0 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-0 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ces deux vecteurs sont colinéaires donc I $\in$ (EF).

Affirmation 4 : FAUSSE

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u}$ (1 ; – 1 ; – 1) est une vecteur directeur de (AB).

Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (CD) est $\begin{cases} x = 3t' - 1 \\ y = -t' \\ z = -2t' + 1 \end{cases}$.

Le point d'intersection s'il existe a des coordonnées telles que $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3t' - 1 \\ y = -t' \\ z = -2t' + 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t + 1 = 3t' - 1 \\ -t + 2 = -t' \\ -t + 3 = -2t' + 1 \end{cases}$

Soit le système $\begin{cases} t + 1 = 3t' - 1 \\ -t + 2 = -t' \end{cases}$ par addition : 2 t' – 1 = 3 donc t' = 2, en remplaçant t = 4

alors – t + 3 = – 1 et – 2 t' + 1 = – 5 donc la dernière condition – t + 3 = – 2 t' + 1 n'est pas vérifiée, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.