Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E′, image de E par f.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que M′ = M.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et − 1.

Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et − 1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M′ est un point de Δ.

CORRECTION

1. E' a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{i}{-i \times i}\right)$ donc z' = 0 donc E' = O

2. $M = M' \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 2z^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

3. *a.* $z' + 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+2z+1}{z}\right) = \frac{1}{2z}(z+1)^2$

$z' - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2-2z+1}{z}\right)$ donc $z' - 1 = \frac{1}{2z}(z-1)^2$ donc $\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

b. $\frac{M'B}{M'A} = \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right| = \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = \frac{|z+1|^2}{|z-1|^2} = \frac{MB^2}{MA^2}$ donc $\frac{M'B}{M'A} = \frac{MB^2}{MA^2}$

4. Si M est un point de Δ distinct du point O, alors MA = MB donc $\frac{M'B}{M'A} = 1$ donc M'B = M'A donc M' est un point de Δ.