Centre de symétrie. Axe de symétrie

Définition : f **paire** si, et seulement si, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

Conséquence :
La courbe représentative de toute fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Pour montrer que l'axe des ordonnées (O y) $(O ; \vec{j})$ est un axe de symétrie pour (C_f) il suffit de montrer que f est paire.

Définition : f **impaire** si, et seulement si pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$,
Conséquence :
La courbe représentative de toute fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Pour montrer que l'origine du repère est un centre de symétrie pour (C_f) il suffit de montrer que f est impaire.

Montrer que I est centre de symétrie de C_f :
3 méthodes possibles :
1. Changement de repère :

On se place dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$ avec I $(a ; b)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit M $(x ; y)$ un point quelconque du plan
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - a ; y - b)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées (X ; Y) dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$.
donc $X = x - a$ et $Y = y - b$ soit $x = X + a$ et $y = Y + b$
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = f(X + a) - b$
Il suffit de montrer que la fonction $X \to f(X + a) - b$ est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à I donc C_f aussi.

2. $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Soit M $(x ; y)$ un point du plan, soit M'$(x' ; y')$ son symétrique par rapport à I.
I est le milieu de [MM'] donc $\dfrac{x + x'}{2} = a$ et $\dfrac{y + y'}{2} = b$ donc $x' = 2a - x$ et $y' = 2b - y$
La courbe est symétrique par rapport à I si pour tout point M de C_f, son symétrique M' par rapport à I appartient à C_f.
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow 2b - y = f(2a - x)$ or $y = f(x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow 2b - f(x) = f(2a - x) \Leftrightarrow f(2a - x) + f(x) = 2b$

3. $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

Soit I $(a ; b)$ M$(a + x ; y)$ M' $(a - x ; y')$
M et M' sont symétriques par rapport à I si et seulement si $\dfrac{y + y'}{2} = b$
La courbe est symétrique par rapport à I si pour tout point M de C_f, son symétrique M' par rapport à I appartient à C_f.
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow 2b - y = f(a - x)$ or $y = f(a + x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow 2b - f(a + x) = f(a - x) \Leftrightarrow f(a - x) + f(a + x) = 2b$

Propriété : Le point $I(a ; b)$ est centre de symétrie pour (C_f) si, et seulement si,
- pour tout x appartenant à D_f, $2a - x$ appartient à D_f et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

ou
- $a - x$ et $a + x$ appartiennent à D_f ; $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

Montrer que la droite D d'équation $x = a$ est axe de symétrie de C_f :
3 méthodes possibles :
1. Changement de repère :

On se place dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$ avec I $(a ; 0)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit M $(x ; y)$ un point quelconque du plan
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - a ; y)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées (X ; Y) dans le repère $(I ; \vec{i}, \vec{j})$.
donc $X = x - a$ et $Y = y$ soit $x = X + a$ et $y = Y$
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = f(X + a)$
Il suffit de montrer que la fonction $X \to f(X + a)$ est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à D donc C_f aussi.

2. $f(2a - x) = f(x)$

Soit M $(x ; y)$ un point du plan, soit M'$(x' ; y')$ son symétrique par rapport à D.
D est la médiatrice de [MM'] donc le milieu H de [MM'] appartient à D, et (MM') est perpendiculaire à D
L'abscisse de H est $\dfrac{x + x'}{2}$ donc $\dfrac{x + x'}{2} = a$ soit $x' = 2a - x$

(MM ') est perpendiculaire à D donc $y = y'$

La courbe est symétrique par rapport à D si pour tout point M de C_f, son symétrique M ' par rapport à D appartient à C_f.
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow y = f(2a - x)$ or $y = f(x)$ donc $M' \in C_f \Leftrightarrow f(x) = f(2a - x)$

3. <u>$f(a + x) = f(a - x)$</u>

Soit M $(a - x\ ;\ y)$ un point du plan, soit M '$(a + x\ ;\ y')$ son symétrique par rapport à D.
D est la médiatrice de [MM '] donc le milieu H de [MM '] appartient à D, et (MM ') est perpendiculaire à D
(MM ') est perpendiculaire à D donc $y = y'$

La courbe est symétrique par rapport à I si pour tout point M de C_f, son symétrique M ' par rapport à I appartient à C_f.
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(a - x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow y = f(a + x)$ or $y = f(a - x)$
$M' \in C_f \Leftrightarrow f(a + x) = f(a - x)$

Propriété : La droite D d'équation $x = a$ est axe de symétrie pour (C_f) si, et seulement si,

- pour tout x appartenant à D_f, $2a - x$ appartient à D_f et $f(2a - x) = f(x)$

ou

- $a - x$ et $a + x$ appartiennent à D_f ; $f(a - x) = f(a + x)$

Exemples :
Montrer que I (3 ; 2) est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)^3 + 2$

1. <u>Changement de repère :</u>

On se place dans le repère $(I\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ avec I (3 ; 2) dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$. Soit M $(x\ ;\ y)$ un point quelconque du plan
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - 3\ ;\ y - 2)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées (X ; Y) dans le repère $(I\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.
donc $X = x - 3$ et $Y = y - 2$ soit $x = X + 3$ et $y = Y + 2$
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) = (x - 3)^3 + 2$
$\Leftrightarrow Y + 2 = f(X + 3) = (X + 3 - 3)^3 + 2 \Leftrightarrow Y = X^3$
La fonction $X \to X^3$ est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à I donc C_f aussi.

2. <u>$f(2a - x) + f(x) = 2b$</u>

$D_f = \mathbb{R}$ donc x et $6 - x$ appartiennent à D_f.
$f(2a - x) = f(6 - x) = (3 - x)^3 + 2 = [-(x - 3)]^3 + 2$
$f(6 - x) = -(x - 3)^3 + 2$
donc $f(6 - x) + f(x) = 4$
donc I(3 ; 2) est centre de symétrie de C_f.

3. <u>$f(a + x) + f(a - x) = 2b$</u>

$D_f = \mathbb{R}$ donc $3 + x$ et $3 - x$ appartiennent à D_f.
$f(a + x) = f(3 + x) = (3 + x - 3)^3 + 2 = x^3 + 2$
$f(a\ x) = f(3 - x) = (3 - x - 3)^3 + 2 = (-x)^3 + 2 = -x^3 + 2$
donc $f(3 - x) + f(3 + x) = 4$

Montrer que la droite D d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)^4 + 2$

1. <u>Changement de repère :</u>

On se place dans le repère $(I\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ avec I (3 ; 0) dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$. Soit M $(x\ ;\ y)$ un point quelconque du plan
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x - 3\ ;\ y)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.
$\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées (X ; Y) dans le repère $(I\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.
donc $X = x - 3$ et $Y = y$ soit $x = X + 3$ et $y = Y$
$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) = (x - 3)^4 + 2$
$\Leftrightarrow Y = f(X + 3) = (X + 3 - 3)^4 + 2 \Leftrightarrow Y = X^4$
La fonction $X \to X^4$ est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à D donc C_f aussi.

2. <u>$f(2a - x) = f(x)$</u>

$D_f = \mathbb{R}$ donc x et $6 - x$ appartiennent à D_f.
$f(2a - x) = f(6 - x) = (3 - x)^4 + 2 = [-(x - 3)]^4 + 2$
$f(6 - x) = (x - 3)^4 + 2$ donc $f(6 - x) = f(x)$
donc la droite D d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)^4 + 2$

3. <u>$f(a + x) = f(a - x)$</u>

$D_f = \mathbb{R}$ donc $3 + x$ et $3 - x$ appartiennent à D_f.
$f(a + x) = f(3 + x) = (3 + x - 3)^4 + 2 = x^4 + 2$
$f(a\ x) = f(3 - x) = (3 - x - 3)^4 + 2 = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2$ donc $f(3 - x) = f(3 + x)$
donc la droite D d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)^4 + 2$