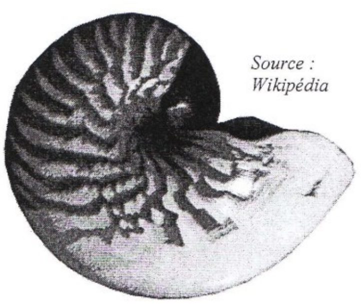
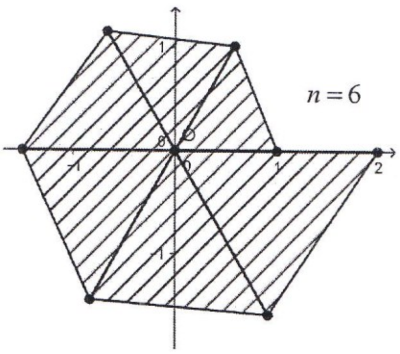
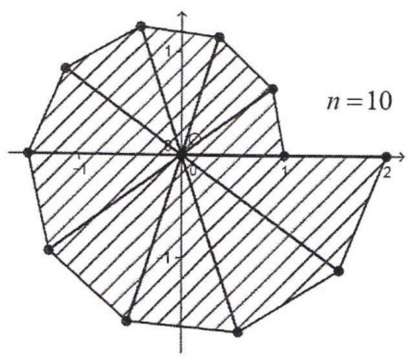
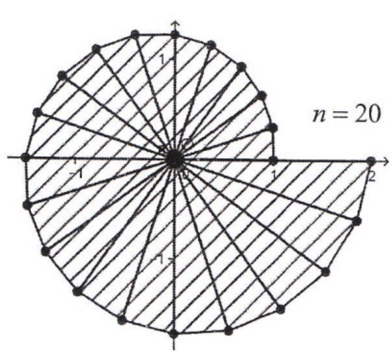
Centres étrangers juin 2016



On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile (photo ci-contre) à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$. Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$ on obtient les figures ci-dessous :







Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1 Déterminer la forme algébrique exacte de z_1.

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers, que l'on déterminera.

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle O $M_0 M_1$, puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k.

2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$

3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $OM_k M_{k+1}$ est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

4. On admet que l'aire du triangle $OM_k M_{k+1}$ est égale à $a_k = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right) \times \left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
TRAITEMENT :	Lire la valeur de n A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à $n-1$ A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right) \times \left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour
SORTIE :	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme:

k	0	1	2	3	4		56	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$, que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}3$.

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après, qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A \geq 7{,}2$.
On ne demande pas de déterminer n.

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		Tant que..............................
L7		n prend la valeur $n+1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n-1$
L10		A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
L11		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	SORTIE :	Afficher ………..

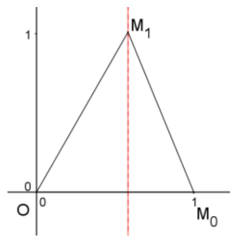
CORRECTION

Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

1 $z_1=\left(1+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{2\pi}{6}}=\frac{7}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7}{12}+i\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

2. $z_0=\left(1+\frac{0}{6}\right)e^{i\frac{2\times 0\pi}{6}}=1$ et $z_6=\left(1+\frac{6}{6}\right)e^{i\frac{2\times 6\pi}{6}}=2$ donc z_0 et z_6 sont des entiers.

3. $[OM_0]$ est un segment de l'axe des abscisses donc la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 est égale à l'ordonnée de M_1 donc à $\frac{7\sqrt{3}}{12}$



L'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}\times OM_0\times h=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{7\sqrt{3}}{12}=\frac{7\sqrt{3}}{24}$

Partie B - Ligne brisée formée à partir de *n* + 1 points

1. Pour tout entier k tel que $0\le k\le n$, $OM_k=|z_k|=1+\frac{k}{n}$

2. Pour k entier tel que $0\le k\le n-1$, $(\vec{u},\overrightarrow{OM_k})=\arg z_k$ donc :

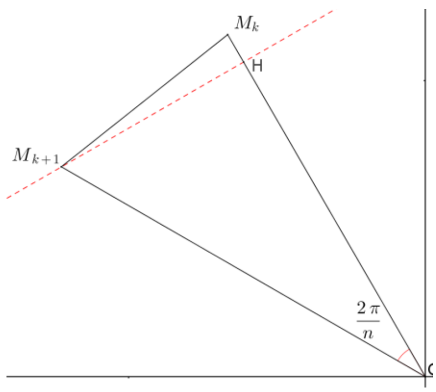
$(\vec{u},\overrightarrow{OM_k})=\frac{2k\pi}{n}$ (à 2π près) et $(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}})=\frac{2(k+1)\pi}{n}$ (à 2π près)

$(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}})=(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}})-(\vec{u},\overrightarrow{OM_k})$ donc $(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}})=\frac{2(k+1)\pi}{n}-\frac{2k\pi}{n}$ (à 2π près)

soit $(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}})=\frac{2\pi}{n}$ (à 2π près).

3. Soit H le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}, alors $\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{HM_{k+1}}{OM_{k+1}}$ donc $HM_{k+1}=OM_{k+1}\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

La hauteur issue de M_{k+1} a une longueur est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.



4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5.

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		Tant que **A < 7,2**
L7		n prend la valeur $n + 1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n - 1$
L10		A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
L11		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	SORTIE :	Afficher $\boldsymbol{n + 1}$