

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable. La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

- Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
- Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
- Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ .
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
- Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.
Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
- Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
- Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

CORRECTION

Partie A

- $P(390 \leq X \leq 410) = P(X \leq 410) - P(X \leq 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$
- La probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable est $P(X \geq 385) = 1 - P(X \leq 385)$
 $P(X \geq 385) = 0,994$
- $Z = \frac{X - 400}{\sigma}$, $P(X \geq 385) = 0,96 \Leftrightarrow P(X \leq 385) = 0,04 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0,04 \Leftrightarrow \frac{-15}{\sigma} = -1,751 \Leftrightarrow \sigma = \frac{15}{1,751}$
 $\Leftrightarrow \sigma \approx 8,6$

Partie B

- $$I = \left[0,96 - 1,96 \sqrt{\frac{0,96 \times (1 - 0,96)}{300}} ; 0,96 + 1,96 \sqrt{\frac{0,96 \times (1 - 0,96)}{300}} \right]$$
$$I = [0,937 ; 0,983]$$

- Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Pour l'échantillon, la fréquence des pains commercialisables est $f = \frac{283}{300}$ soit environ 0,943.
0,943 appartient à l'intervalle de fluctuation I donc l'objectif a été atteint au risque 5 %.

Partie C

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t} \text{ et } P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

1. $P(T \geq 30) = 0,913$ donc $e^{-\lambda \times 30} = 0,913$ donc $-\lambda \times 30 = \ln 0,913$ soit $\lambda = -\frac{\ln 0,913}{30}$ soit environ $\lambda = 0,003$.

2. T suit une loi exponentielle (à durée de vie sans vieillissement) donc la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 30 jours donc $P(T \geq 30) = 0,913$

3. $P(T \geq 365) = e^{-\lambda \times 365} = 0,335$ donc le vendeur n'a pas raison

$$P(T \geq n) \geq 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda n} \geq 0,5 \Leftrightarrow -\lambda n \geq \ln 0,5 \Leftrightarrow n \leq -\frac{\ln 0,5}{0,003} \text{ soit } 231 \text{ jours au maximum.}$$