Polynésie juin 2014

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A
Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. *a.* Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.
b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B
Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12\,j + 31\,m$.
Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'*anniversaire du spectateur.*

1. Première méthode :
On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :    j et m sont des entiers naturels
Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                 | Pour j allant de 1 à 31 faire :
                 |    | z prend la valeur 12 j + 31 m
                 |    | afficher z
                 | Fin Pour
               Fin Pour
```

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12\,j + 31\,m = 503$.

2. Deuxième méthode :
a. Démontrer que $7\,m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7\,m$ par 12.
c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :
a. Démontrer que le couple $(-2\,;\,17)$ est solution de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$.
b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$, alors $12\,(x + 2) = 31\,(17 - y)$.
c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$, solutions de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$.
d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tel que $1 \leq y \leq 12$.
En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

CORRECTION

Partie A

1. j = 1 et m = 8 donc le programme de calcul donne $1 \times 12 + 37 \times 8 = 308$

2. *a.* $z = 12\,j + 37\,m$ donc $z \equiv 37\,m\ [26]$ or $37 = 3 \times 12 + 1$ donc $37 \equiv 1\ [12]$ donc $37\,m \equiv m\ [12]$ soit $z \equiv m\ [12]$

b. $474 \equiv m\ [12]$ or $474 = 12 \times 39 + 6$ donc $474 \equiv 6\ [12]$
$1 \le m \le 12$ et $m \equiv 6\ [12]$ donc m = 6
$474 = 12\,j + 37 \times 6$ donc $j = \dfrac{474 - 37 \times 6}{12}$ soit j = 21
Le spectateur ayant obtenu le nombre 474 est né le 21 juin.

Partie B
1. Première méthode :

```
Variables :    j et m sont des entiers naturels
Traitement :   Pour m allant de 1 à 12 faire :
                 Pour j allant de 1 à 31 faire :
                   z prend la valeur 12 j + 31 m
                   si z = 503
                       afficher j
                       afficher m
                   Fin si
                 Fin Pour
               Fin Pour
```

2. Deuxième méthode :
a. $z = 12\,j + 31\,m$ donc $z - 7\,m = 12\,j + 24\,m$ donc $z - 7\,m \equiv 0$ modulo 12 donc $z \equiv 7\,m$ modulo 12
7 m et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

b.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
reste de la division euclidienne de 7 m par 12	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

c. $503 = 12 \times 41 + 11$ donc $503 \equiv 11$ modulo 12 donc $7\,m \equiv 11$ modulo 12
m est un mois donc $1 \le m \le 12$ donc par lecture inverse du tableau précédent m = 5
$503 = 12\,j + 31\,m$ donc $12\,j = 503 - 31 \times 5 = 348$ donc j = 29. Le spectateur est né le 29 mai.

3. Troisième méthode :
a. $12 \times (-2) + 31 \times 17 = -24 + 527 = 503$ donc le couple $(-2\,;\,17)$ est solution de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$.

b. $\begin{cases} 12\,x + 31\,y = 503 \\ 12\,x_0 + 31\,y_0 = 503 \end{cases}$ donc par soustraction membre à membre $12\,(x - x_0) + 31\,(y - y_0) = 0$ soit $12\,(x - x_0) = -31\,(y - y_0)$
donc $12\,(x - x_0) = 31\,(y_0 - y)$ soit $12\,(x + 2) = 31\,(17 - y)$.

c. $12\,(x + 2) = 31\,(17 - y)$ donc 12 divise $31\,(17 - y)$
31 et 12 sont premiers entre eux et 12 divise $31\,(17 - y)$ donc d'après le théorème de Gauss, 12 divise $17 - y$
Il existe un entier relatif k tel que $17 - y = 12\,k$
En remplaçant : $12\,(x + 2) = 31 \times 12\,k$ donc $x + 2 = 31\,k$ donc $x = 31\,k - 2$ et $y = 17 - 12\,k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vérification : si $x = 31\,k - 2$ et $y = 17 - 12\,k$ ($k \in \mathbb{Z}$) alors $12\,x + 31\,y = 12\ 31\,k + 12 \times 2 + 31 \times (-12\,k) + 17 \times 31 = 503$ donc les solutions de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$ sont les couples $(31\,k - 2\,;\,17 - 12\,k)$ avec ($k \in \mathbb{Z}$)

c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$, solutions de l'équation $12\,x + 31\,y = 503$.
d. $1 \le y \le 12$ donc $1 \le 17 - 12\,k \le 12$ soit $17 - 12 \le 12\,k \le 17 - 1$ soit $5 \le 12\,k \le 16$, $k \in \mathbb{Z}$ donc k = 1
k = 1 donc y = 17 – 12 = 5 et x = 31 – 2 = 29 donc il existe un unique couple d'entiers relatifs (29 ; 5) tel que $1 \le y \le 12$.

La date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B) est le 29 mai.