Antilles-Guyane juin 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n.$$

1. *a.* Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de suite (u_n).

2. *a.* Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.

Entrée	n et u sont des nombres	
Initialisation	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie	Afficher n	

CORRECTION

1\. *a.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b. D'après ce tableau, la suite u semble être décroissante et tendre vers 0.

2\. *a.* **Initialisation :** $n = 1$, $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5^1 = \frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$ donc $u_1 \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^1$.

Hérédité : Montrons pour tout entier $n \geq 1$ que si $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ alors $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$

$u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$ or $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc $\frac{1}{5} u_n \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ soit $\frac{1}{5} u_n \geq \frac{3}{4} \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geq \frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$ soit $u_{n+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times 0{,}5^n$ donc $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$

$1 \geq 0{,}5$ donc $0{,}5^n \geq 0{,}5^n \times 0{,}5$ soit $0{,}5^n \geq 0{,}5^{n+1}$ donc $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$

Pour tout entier n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc $-\frac{4}{5} u_n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ soit $-\frac{4}{5} u_n \leq -3 \times 0{,}5^n$ donc $-\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n \leq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite u est décroissante.

c. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc la suite u est positive.

La suite u est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

3\. *a.* $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ donc $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$ donc en remplaçant : $v_{n+1} + 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}(v_n + 10 \times 0{,}5^n) + 3 \times 0{,}5^n$

$v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n + 2 \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^{n+1}$ or $10 \times 0{,}5^{n+1} = 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n = 5 \times 0{,}5^n$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$, $v_0 = u_0 - 10 = -8$ donc pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = -8 \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n$ et $v_n = -8 \left(\frac{1}{5}\right)^n$ donc $u_n = -8 \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4\.

Entrée	n et u sont des nombres	
Initialisation	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement	Tant que $\boldsymbol{u > 0{,}01}$	(1)
	n prend la valeur $\boldsymbol{n + 1}$	(2)
	u prend la valeur $\boldsymbol{0{,}2\, u + 10 \times 0{,}5^n}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie	Afficher n	